§12. ζ関数　　1・11・1

§12.1. 関数等式と解析接続

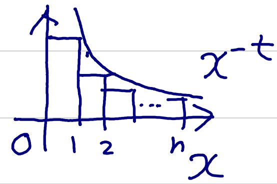
Prp. 12.1.1　$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$:（Riemannの）ゼータ関数

は $\mathrm{Re}\, s > 1$ で絶対一様収束して、sの正則関数を定める。

∵ $s = t + iu$: 実部と虚部．$|n^{-s}| = |n^{-t} e^{-iu \cdot \log n}| = n^{-t}$

$t > 1$なる $t > 1+\delta > 1$ で $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-t} < 1 + \int_1^{\infty} x^{-t} dt$

$= 1 + \frac{1}{t-1} < 1 + \frac{1}{\delta} < \infty$



より一様収束．

従って $\zeta(s)$は絶対一様収束して、正則関数．□

Thm. 12.1.2　$\zeta(s)$は$\mathbb{C}$上の有理型関数に解析接続され、極は $s=1$のみ．1位．□

Thm. 12.1.3　$\xi(s) := \pi^{-s/2} \cdot \Gamma(s/2)\, \zeta(s)$ は $\mathrm{Re}\, s > 1$ で正則で $\mathbb{C}$上の有理型関数に解析接続される．

それは $s=0$ と $s=1$ に1位の極を持ち、

$$\xi(s) = \xi(1-s) \quad \forall s \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$$

$\zeta(s)$で書くと　$\zeta(s) = \pi^{s-\frac{1}{2}} \dfrac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \cdot \zeta(1-s)$

（Thm.12.1.2.証明）$\xi(s), \Gamma(s)$が$\mathbb{C}$上有理型なので $\zeta(s) = \pi^{s/2}\xi(s)/\Gamma(s/2)$もそう．

§11より　$1/\Gamma(s/2)$は整関数で $s = 0, -2, -4, \dots$に1位の零点．

$\xi(s)$の1位の極 $s=0$ は打ち消しあう．□

§12.2. 函数等式の証明

Dfn. $t>0$ $\quad \vartheta(t) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 t}$: テータ函数

tについて広義一様収束 (Lem. 12.2.2)

Thm. 12.2.1. $t>0$で $\vartheta(t) = \vartheta(t^{-1})\cdot t^{-\frac{1}{2}}$ (証明は後で)

Lem. 12.2.2. (1) $\vartheta(t)$は$t>0$で広義一様収束

(2) $\exists c'>0$, $t\geq 1$ で $\vartheta(t) \leq c'\cdot e^{-\pi t}$

∵ (1) $\vartheta(t) = 1+2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t} \leq 1+2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n t}$

$= 1+2e^{-\pi t}/(1-e^{-\pi t})$: 右辺は収束, 単調減少.

(2) $t\geq 1$なら $\vartheta(t)-1 \leq 2e^{-\pi t}/(1-e^{-\pi})$. $c' := \frac{2}{1-e^{-\pi}}$ □

Prp. 12.2.3. $\xi(s) := \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$. $\mathrm{Re}\, s>1$なら

$\xi(s) = \frac{1}{2}\int_0^\infty u^{s/2-1}(\vartheta(u)-1)\,du$ (証明は次頁) □

(Thm.12.1.3.の証明) 先に証明

$\psi(u) := \frac{1}{2}(\vartheta(u)-1)$ は Prp.12.2.1.より $\psi(u) = u^{-1/2}\psi(u^{-1}) + \frac{1}{2}(u^{-1/2}-1)$

Thm.12.2.3から $\xi(s) = \int_0^\infty u^{s/2-1}\psi(u)\,du$

$= \int_0^1 u^{s/2-1}\psi(u)\,du + \int_1^\infty \cdots du$

$= \int_0^1 u^{\frac{s}{2}-1}\left(u^{-\frac{1}{2}}\psi(u^{-1}) + \frac{1}{2}(u^{-\frac{1}{2}}-1)\right)du + \int_1^\infty \cdots du$

$= \int_0^1 \frac{1}{2}\left(u^{\frac{1}{2}(s-3)} - u^{\frac{1}{2}s-1}\right)du$

$\quad + \int_\infty^1 u^{-\frac{1}{2}(s-3)}\psi(u)\cdot(-u^{-2}du) + \int_1^\infty \cdots du$

$= \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \int_1^\infty \left(u^{-\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}} + u^{\frac{1}{2}s-1}\right)\psi(u)\,du$

Lem. 12.2.2.より $\psi(u)$は$u\to\infty$で指数的に減少.

よって $\int_1^\infty$ はsの整函数を定める. 問2

∴ $\xi(s)$は $s=0,1$ に1位の極を持つ $\mathbb{C}$上の有理型函数に解析接続される.

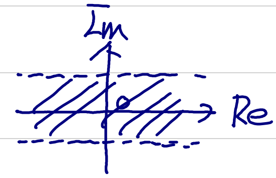
また 上の表示は $s\leftrightarrow 1-s$ で不変なので, $\xi(s)=\xi(1-s)$ □

(Prp.12.2.3の証明)

$$\int_0^\infty u^{\frac{s}{2}-1}\cdot\sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 u}\,du$$ Lem.12.2.2.より∫とΣは交換可.

$$= \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty u^{\frac{s}{2}-1}e^{-\pi n^2 u}\,du = \sum_{n=1}^\infty (\pi n^2)^{-\frac{s}{2}}\cdot\Gamma(s/2)$$

$$= \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\cdot\sum_{n=1}^\infty n^{-s} = \xi(s)$$ □



(Prp.12.2.1. テータの関数等式 の証明 の概略)

$a>0$, $S_a := \{z\in\mathbb{C} ; |\mathrm{Im}\,z|<a\}$

$f\in\mathcal{F}_a := \{f: S_a\to\mathbb{C} \mid 正則, \exists A>0, \forall z=x+iy\in S_a, |f(z)|\le\frac{A}{1+x^2}\}$

$\xi\in\mathbb{R}$ $\hat f(\xi) := \int_{-\infty}^\infty f(x)\exp(-2\pi i x\xi)\,dx$: Fourier変換

: 仮定 $f\in\mathcal{F}_a$ から $\hat f(\xi)\in\mathbb{C}$ がwell-defined (問12.2.1.)

Thm.(Poisson和公式) $\forall f\in\mathcal{F}_a$. $\sum_{n=-\infty}^\infty f(n) = \sum_{n=-\infty}^\infty \hat f(n)$

証明は問. (両辺は収束する)

$f(x) := e^{-\pi x^2}\in\mathcal{F}_1$

$\hat f(\xi) = e^{-\pi\xi^2}$ (∵) $\hat f(0) = \int_{-\infty}^\infty e^{-\pi x^2}dx = 1$.

$\hat f'(\xi) = \int_{-\infty}^\infty f(x)\cdot(-2\pi i x)e^{-2\pi i x\xi}dx = i\cdot\hat{f'}(\xi)$

$= [i f(x)\cdot e^{-2\pi i x\xi}]_{-\infty}^\infty + 2\pi\xi\cdot\hat f(\xi) = 2\pi\xi\hat f(\xi)$

$x\mapsto t^{1/2}x$ として $g(x) := e^{-\pi t x^2}$ のFourier変換は

$$\hat g(\xi) = \int_{-\infty}^\infty e^{-\pi t x^2}e^{-2\pi i x\xi}dx = \int_{-\infty}^\infty e^{-\pi y^2}e^{-2\pi i y\xi/t^{1/2}}dy/t^{1/2} = t^{-1/2}e^{-\pi\xi^2/t}$$

Poisson和公式をgに用いて $\sum_{n=-\infty}^\infty e^{-\pi n^2 t} = t^{-1/2}\sum_{n=-\infty}^\infty e^{-\pi n^2/t}$ □

§12.3. 無限積表示.

Thm. 12.3.1. $\mathrm{Re}\, s>1$ なら $\zeta(s)=\prod_{p:素数}\frac{1}{1-p^{-s}}$ Euler積

∵ (右辺) $=\prod_p (1+p^{-s}+p^{-2s}+\cdots)$

$$= 1+\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{\substack{p_1<\cdots<p_r\\ 素数}}\sum_{m_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{m_r=1}^{\infty}(p_1^{m_1}\cdots p_r^{m_r})^{-s}$$

$$= 1+\sum_{n=2}^{\infty}n^{-s}$$ (素因数分解の一意性) □

Thm. 12.3.2. $0\leqq \mathrm{Re}\, s\leqq 1$ の補集合にある $\zeta(s)$ の零点は $s=-2,-4,-6,\cdots$.

∵ • Euler積から $\mathrm{Re}\, s>1$ に零点はない.

• 函数等式から $\zeta(s)=\pi^{s-1/2}\,\Gamma(\frac{1-s}{2})/\Gamma(\frac{s}{2})\times\zeta(1-s)$

$\mathrm{Re}\, s<0$ だと
$\begin{cases} \zeta(1-s) \text{ は } \mathrm{Re}(1-s)>1 \text{ より零点なし} \\ \Gamma(\frac{1-s}{2}) \quad〃 \quad〃 \\ 1/\Gamma(\frac{s}{2}) \text{ は } s=-2,-4,\cdots \text{ に零点を持つ.} \end{cases}$ □

Fact. (1) $\mathrm{Re}\, s=0,1$ 上に $\zeta(s)$ の零点はない

(2) (1) ⟺ 素数定理: (n以下の素数の数) $\approx\frac{n}{\log n}$ $(n\to\infty)$ □

Riemann予想: $0<\mathrm{Re}(s)<1$ における $\zeta(s)$ の零点は $\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}$ 上にのみ存在