現代数学基礎 CⅢ　12 月 21 日分課題解答

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

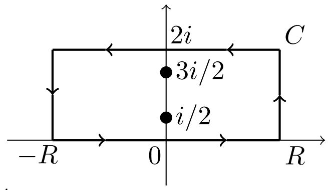
問題. $\xi \in \mathbb{R}$ とする．双曲余弦関数 $\cosh z \coloneqq (e^z + e^{-z})/2$ に関する等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i x\xi}}{\cosh(\pi x)} dx = \frac{1}{\cosh(\pi\xi)}$$

を, 頂点 $z = -R,\ R,\ R+2i,\ -R+2i$ の長方形の周 C 上での $f(z) \coloneqq e^{-2\pi i z\xi}/\cosh(\pi z)$ の複素積分を用いて証明せよ．

解答. 求める積分を $I \coloneqq \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz$, $f(z) \coloneqq e^{-2\pi i z\xi}/\cosh(\pi z)$ と書く．積分路を C と書くと

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(z)\,dz + \int_{R}^{R+2i} f(z)\,dz \\ + \int_{R+2i}^{-R+2i} f(z)\,dz + \int_{-R+2i}^{-R} f(z)\,dz.\end{aligned} \qquad (*)$$



C の内部にある $f(z)$ の極は $e^{\pi z} + e^{-\pi z} = 0$ の解, つまり $\alpha \coloneqq \frac{i}{2}$ と $\beta \coloneqq \frac{3i}{2}$．どちらも 1 位の極で, 留数は

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{z=\alpha} f(z) &= \lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)f(z) = \lim_{z\to\alpha} e^{-2\pi i z\xi}\frac{2(z-\alpha)}{e^{\pi z}+e^{-\pi z}} = \lim_{z\to\alpha} 2e^{-2\pi i z\xi}e^{\pi z}\frac{(z-\alpha)}{e^{2\pi z}+1} \\ &= \lim_{z\to\alpha} 2e^{-2\pi i z\xi}e^{\pi z}\frac{(z-\alpha)}{e^{2\pi z}-e^{2\pi\alpha}} = 2e^{-2\pi i\alpha\xi}e^{\pi\alpha}\left.\frac{1}{(e^{2\pi z})'}\right|_{z=\alpha} = 2e^{-2\pi i\alpha\xi}e^{\pi\alpha}\frac{1}{2\pi e^{2\pi\alpha}} = \frac{e^{\pi\xi}}{\pi i}.\end{aligned}$$

及び $\operatorname{Res}_{z=\beta} f(z) = -e^{3\pi\xi}/(\pi i)$．よって留数定理から

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i\Big(\operatorname*{Res}_{z=\alpha} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=\beta} f(z)\Big) = 2\left(e^{\pi\xi} - e^{3\pi\xi}\right).$$

$R \to \infty$ で $\int_R^{R+2i}$ および $\int_{-R+2i}^{-R}$ の部分は 0 に収束する．実際, R が十分大きければ, 区間 $[R, R+2i]$ 上では $\left|e^{-2\pi i z\xi}\right| \le e^{4\pi|\xi|}$ 及び

$$|\cosh \pi z| = \frac{1}{2}\left|e^{\pi z} + e^{-\pi z}\right| \ge \frac{1}{2}\left||e^{\pi z}| - \left|e^{-\pi z}\right|\right| \ge \frac{1}{2}\big(e^{\pi R} - e^{-\pi R}\big)$$

となるから, $[R, R+2i]$ の長さが $\ell([R, R+2i]) = 2$ であることと合わせて, 三角不等式より

$$\left|\int_R^{R+2i} f(z)\,dz\right| \le \ell([R, R+2i]) \cdot \sup_{z\in[R,R+2i]} |f(z)| \le \frac{4e^{4\pi|\xi|}}{e^{\pi R} - e^{-\pi R}}$$

となって, $R \to \infty$ で 0 に収束することが分かる．$[-R, -R+2i]$ 上でも同様の議論が成立する．また $\int_{R+2i}^{-R+2i} f(z)\,dz = -e^{4\pi\xi}\int_{-R}^{R} f(z)\,dz$．従って冒頭の等式 $(*)$ は

$$I - e^{4\pi\xi} I = 2\left(e^{\pi\xi} - e^{3\pi\xi}\right)$$

となるので,

$$I = \frac{2e^{2\pi\xi}\left(e^{\pi\xi} - e^{-\pi\xi}\right)}{e^{4\pi\xi} - 1} = \frac{1}{\cosh(\pi\xi)}.$$

コメント. 3 点満点で採点しました．留数計算ができているかどうか, $R \to \infty$ の不等式評価ができているかどうか, 計算間違いせずに正解を導けているかどうかをそれぞれ 1 点としました．平均点は 1.8 点でした．

以上です.