現代数学基礎 CIII　12 月 21 日分演習問題

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
連絡先: yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2023WC3.html

問題 11.1 (講義ノート補題 11.1.3)**.** 複素数平面の右半平面 $\mathbb{H}_r := \{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > 0\}$ 上の正則関数 $\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1}\, dt$ について, 任意の $s \in \mathbb{H}_r$ に対し $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$, 及び任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $\Gamma(n) = (n-1)!$ が成立することを示せ.

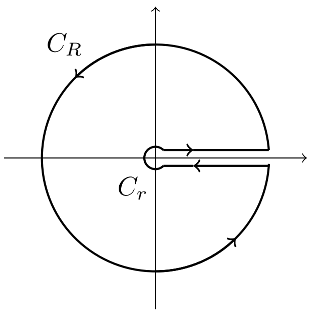
問題 11.2 (講義ノート命題 11.1.2)**.** $\mathbb{H}_r := \{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > 0\}$ を複素数平面の右半平面とする.

(1) $t > 0$ と $s \in \mathbb{H}_r$ について, $\sigma := \mathrm{Re}(s)$ とすると $\left|e^{-t} t^{s-1}\right| = e^{-t} t^{\sigma-1}$.

(2) $0 < \varepsilon < 1$ に対して $F_\varepsilon(s) := \int_\varepsilon^{1/\varepsilon} e^{-t} t^{s-1}\, dt$ と置く. $0 < m < M$ に対して $S_{m,M} := \{s \in \mathbb{C} \mid m < \Re(s) < M\}$ と置くと, $F_\varepsilon(s)$ は $S_{m,M}$ 上正則である. $S_{m,M}$ 上一様に $\lim_{\varepsilon \to 0} F_\varepsilon(s)$ が収束すれば, その収束先が $S_{m,M}$ 上正則である事を示せ. 但し講義ノートの定理 6.5.2 (コンパクト集合上の正則関数列の一様収束先は正則) を用いて良い.

(3) $M > 1$ を固定する. ある $C > 0$ が存在して, 任意の $t > 1$ に対して $t^{M-1} < Ce^{t/2}$ が成立する事を示せ.

問題 11.3 (講義ノート定理 11.2.1 の証明, 問題 8.1.8)**.** $0 < s < 1$ に対して $\int_0^\infty \frac{v^{s-1}}{1+v}\, dv = \frac{\pi}{\sin \pi s}$ となる事を, 下図の積分路上での複素積分を用いて示せ.



問題 11.4 (講義ノート定理 11.3.2 の証明)**.** $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ と $t \in \mathbb{R}$ に対し $f_n(t) := (1 - t/n)^n$ と置く.

(1) $0 \leq t \leq n$ に対し $f_n(t) \leq f_{n+1}(t) \leq e^{-t}$ となる事を示せ.

(2) $c > 0$ を固定する. 実数の閉区間 $[0, c]$ の上で一様に $\lim_{n \to \infty} f_n(t) = e^{-t}$ となる事を示せ.

問題 11.5 (講義ノート定理 11.3.3, 問題 9.2.4)**.** $\sin z$ の無限積表示 $\sin z = z \prod_{n=1}^\infty (1 - \frac{z^2}{n^2 \pi^2})$ から円周率に関する Wallis の公式 $\pi/2 = \prod_{n=1}^\infty \frac{(2n)^2}{4n^2 - 1}$, $\sqrt{\pi} = \lim_{n \to \infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)! \sqrt{n}}$ を導け.

解答 11.1. $\Gamma(s)$ は実変数の (広義) 積分なので部分積分ができて, $\Gamma(s+1) = \int_0^\infty e^{-t}t^s\,dt = [-e^{-t}t^s]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-t}t^{s-1}\,dt = s\Gamma(s)$. 後半は前半と $\Gamma(1) = 1$ から.

解答 11.2. (1) $s = \sigma e^{i\theta}$ と極座標表示すると, $t > 0$ より $t^s = t^\sigma \exp(i\theta \log t)$ なので $|t^s| = t^\sigma$.

(2) $0 < l < L$ に対して $S_{m,M}$ のコンパクト部分集合 $S_{m,M}^{l,L} \coloneqq \{s \in S_{m,M} \mid l < \mathrm{Im}(s) < L\}$ を考えると, 仮定より $F_\varepsilon(s)$ は $\varepsilon \to 0$ で $S_{m,M}^{l,L}$ 上一様収束するので, 定理 6.5.2 より収束先は $S_{m,M}^{l,L}$ 上正則. l, L は任意に取れるので, 収束先は $S_{m,M}$ 上正則.

(3) $f_M(t) \coloneqq t^{M-1}e^{-t/2}$ は $t > 1$ において最大値 $f_M(2M-2)$ を取る. $C \coloneqq f_M(2M-2)+1$ とすれば良い.

解答 11.3. 問題の積分路 C 上で関数 $z^{s-1}/(1+z)$ を積分すると, $z^{s-1} = e^{(s-1)\log z}$ の分岐に気を付けて

$$\int_C \frac{z^{s-1}}{1+z}dz = \int_{C_R} \frac{z^{s-1}}{1+z}dz + \int_{C_r} \frac{z^{s-1}}{1+z}dz + \int_r^R \frac{t^{s-1}}{1+t}dt + \int_R^r \frac{e^{2\pi i(s-1)}t^{s-1}}{1+t}dt.$$

まず C 内の被積分関数の極は $z = -1$ のみだから

$$\int_C \frac{z^{s-1}}{1+z}dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-1} \frac{z^{s-1}}{1+z} = 2\pi i e^{(s-1)\log(-1)} = -2\pi i e^{\pi i s}.$$

次に C_R 上の積分について

$$\left|\int_{C_R} \frac{z^{s-1}}{1+z}dz\right| \le \left|\int_0^{2\pi} \frac{R^{s-1}e^{i\theta(s-1)}}{1+Re^{i\theta}} Rie^{i\theta}d\theta\right| \le \int_0^{2\pi} \frac{R^s}{R-1}d\theta = \frac{2\pi R^s}{R-1}.$$

$0 < s < 1$ より $R \to \infty$ で $R^s/(R-1) \to 0$ なので, $\int_{C_R}$ も $R \to \infty$ で 0 に収束する. 同様に C_r 上の積分も

$$\left|\int_{C_r} \frac{z^{s-1}}{1+z}\,dz\right| \le \frac{2\pi r^s}{1-r}$$

と評価できて, $r \to 0$ で 0 に収束することが分かる. 最後に

$$\int_r^R \frac{t^{s-1}}{1+t}dt + \int_R^r \frac{e^{2\pi i(s-1)}t^{s-1}}{1+t}\,dt = (1-e^{2\pi i s})\int_r^R \frac{t^{s-1}}{1+t}\,dt$$

は $r \to 0$, $R \to \infty$ で $(1-e^{2\pi i s})\int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{1+t}dt$ に収束する. 以上より

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{sx}}{1+e^x}dx = \frac{-2\pi i e^{\pi i s}}{1-e^{2\pi i s}} = \frac{\pi}{\sin s\pi}.$$

解答 11.4. 実解析の典型問題なので省略する.

解答 11.5. 前半は無限積表示で $z = \pi/2$ とすれば良い. 後半は $\prod_{n=1}^N \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2N+1}(\frac{2^{2N}N!}{(2N)!})^2$ から従う.