§11. Γ函数 12・21・1

§11.1. 積分表示と解析接続

<u>Dfn.</u> 11.1. $s>0$ に対し $\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt$ (実積分)

広義積分の収束: $\begin{cases} t \to +0 \text{ で} & t^{s-1} \text{ は可積分 } (\because s>0) \\ t \to \infty \text{ で} & e^{-t}t^{s-1} < e^{-t/2} \text{ は可積分} \end{cases}$

$n \in \mathbb{Z}_{>0}$ なら $\Gamma(n) = (n-1)!$ 問1. $\square$

<u>Prp.</u> 11.1.2. 上の積分は $s \in \mathbb{H}_r := \{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > 0\}$ 右半平面 上の正則函数を定める.

(∵) 積分の収束: $\sigma := \mathrm{Re}(s)$. $|e^{-t}t^{s-1}| = e^{-t}t^{\sigma-1}$ は可積分. 問2

正則性: $0 < {}^\forall m < {}^\forall M$. $S_{m,M} := \{s \in \mathbb{C} \mid m < \mathrm{Re}(s) < M\}$

上で $\Gamma(s)$ が正則であることを示す.

$\Gamma(s) = \lim_{\varepsilon \to 0} F_\varepsilon(s)$, $F_\varepsilon(s) := \int_\varepsilon^{1/\varepsilon} e^{-t} t^{s-1} dt$

Thm. 6.5.4. (積分で定義される正則函数) より $F_\varepsilon(s)$ は $S_{m,M}$ 上正則

Thm. 6.5.2. (コンパクト集合上の正則函数列の一様収束先は正則) より

$S_{m,M}$ 上一様に $F_\varepsilon(s) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \Gamma(s)$ となることを示せば良い.

$\sigma = \mathrm{Re}(s)$. $|\Gamma(s) - F_\varepsilon(s)| \leq \int_0^\varepsilon + \int_{1/\varepsilon}^\infty e^{-t}t^{\sigma-1}dt$ 問2

$\varepsilon < 1$ で $\left|\int_0^\varepsilon\right| \leq \int_0^\varepsilon t^{\sigma-1}dt \leq \int_0^\varepsilon t^{m-1}dt = \frac{1}{m}\varepsilon^m \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$ $S_{m,M}$ 上一様

$\varepsilon < 1, M > 1$ で $\left|\int_{1/\varepsilon}^\infty\right| \leq \int_{1/\varepsilon}^\infty e^{-t}t^{M-1}dt$

$\leq C \cdot \int_{1/\varepsilon}^\infty e^{-t/2}$, ${}^\exists C>0, {}^\forall t>1.\ t^{M-1} < C \cdot e^{t/2}$

$= 2C/e^{1/2\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$ 問2 $\square$

$S_{m,M}$ 上一様

<u>Lem.</u> 11.1.3. $s \in \mathbb{H}_r$ $\Gamma(s+1) = s \cdot \Gamma(s)$

(∵) 問1. $\square$

Thm. 11.1.4. $\Gamma(s)$は$\mathbb{C}$上の有理型函数に解析接続される。極は $s=0,-1,-2,\ldots$ 全て1位。 $\mathrm{Res}_{s=-n}\Gamma(s) = \frac{(-1)^n}{n!}$

(証) 各 $m\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対して $\mathbb{H}_r(m) := \{s\in\mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > -m\}$ に解析接続する。

$m=1$: $F_1(s) := \Gamma(s+1)/s$.

は $\mathbb{H}_r(1)$ 上有理型。極は $s=0$. 1位, $\mathrm{Res} = \Gamma(1) = 1$.

$m>1$: $F_m(s) := F_{m-1}(s+1)/s = \cdots = \Gamma(s+m)/s(s+1)\cdots(s+m-1)$

帰納法で, $\mathbb{H}_r(m)$上有理型, 極は $s=0,-1,\ldots,-(m-1)$, 1位,

$\mathrm{Res}_{s=-n} F_m(s) = \Gamma(-n+m)/(-n)(-n+1)\cdots(-1)\cdot 1\cdot 2\cdots(-n+m-1)$

$(0\le n\le m-1)$ $\quad = (m-n-1)!/(-1)^n\cdot n!\cdot(m-n-1)! = (-1)^n/n!$.

Lem.11.1.3.より, $s\in\mathbb{H}_r$ なる $F_m(s)=\Gamma(s)$.

一致の原理より, $1\le \forall k\le m$, $\mathbb{H}_r(k)$上 $F_m(s)=F_k(s)$.

よって $\forall m\in\mathbb{Z}_{>0}$ で $F_m(s)$が $\Gamma(s)$の $\mathbb{H}_r(m)$への解析接続. □

§11.2 函数等式

Thm. 11.2.1. $\forall s\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$, $\Gamma(s)\cdot\Gamma(1-s) = \pi/\sin\pi s$. 特に $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$

(証) 両辺とも $s\in\mathbb{Z}$ に1位の極を持つ有理型函数。

一致の定理より, 実区間 $(0,1)\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ 上で等式を示せば良い。

Lem. $\forall s\in(0,1)$ $\frac{\pi}{\sin\pi s} = \int_0^\infty \frac{v^{s-1}}{1+v}ds$ 問3

左辺について. $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-u}u^{s-1}du = t\int_0^\infty e^{-vt}(vt)^{s-1}dv$

$\therefore\ \Gamma(1-s)\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t}t^{-s}\Gamma(s)dt$ ← $t>0$: 定数. $u=vt$

積分の順序交換

$\int_0^\infty e^{-t(1+v)}v^{s-1}dv = \frac{v^{s-1}}{1+v}$ は $v\in(0,\infty)$について広義一様収束.

$= \int_0^\infty e^{-t}t^{-s}\cdot\left(t\int_0^\infty e^{-vt}(vt)^{s-1}dv\right)dt$

$= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-t(v+1)}v^{s-1}dvdt$

$= \int_0^\infty\int_0^\infty 〃\, dtdv = \int_0^\infty \frac{v^{s-1}}{1+v}dv = \frac{\pi}{\sin\pi s}$ □

§11.3. 無限積表示

<u>Dfn.</u> $\gamma := \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - \log N\right)$. : Euler定数 $\square$

収束することは問5.

<u>Thm.</u> (Weierstrassの表示) $\forall z\in\mathbb{C}$. $\frac{1}{\Gamma(z)} = e^{\gamma z}\cdot z\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}$
11.3.1.
特に整函数. $\square$

<u>Thm.</u> (Gaussの表示) $\forall z\in\mathbb{C}$ $\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n\to\infty}\frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n!\cdot n^z}$
11.3.2. $\square$

(両者は同値) $z(z+1)\cdots(z+n)/n!\cdot n^z = z\cdot(1+z)\cdots\left(1+\frac{z}{n}\right)\cdot\exp(-z\cdot\log n)$

$$= z\cdot\exp\left[\left(-\log n+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)z\right]\cdot\prod_{k=1}^{n}e^{-z/k}\cdot\left(1+\frac{z}{k}\right) \quad \square$$

(11.3.2.の証明) $z=x\in\mathbb{R}$で示せば、両辺は整……函数なので、一致の定理より十分.

$n\in\mathbb{Z}_{>0}$, $x>0$. $\gamma_n(x) := \int_0^n t^{x-1}f_n(t)\,dt$, $f_n(t) := (1-t/n)^n$

$B(\alpha,\beta) := \int_0^1 s^{\alpha-1}(1-s)^{\beta-1}ds = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)/\Gamma(\alpha+\beta)$ $(\alpha,\beta>0)$

$\gamma_n(x) = n^x\cdot B(x,n+1) = n^x\cdot n!\,\Gamma(x)/\Gamma(x+n+1) = n^x\cdot n!/(x+n)(x+n-1)\cdots x$

$\lim_{n\to\infty}\gamma_n(x) = \Gamma(x)$を示す. ← $\Gamma(s+1) = s\cdot\Gamma(s)$

- $0\le t\le n$で $f_n(t)\le f_{n+1}(t)\le e^{-t}$: 問4

  $\therefore \gamma_n(x)\le\gamma_{n+1}(x)\le\int_0^{n+1}t^{x-1}e^{-t}dt\le\Gamma(x)$ $\therefore \lim_{n\to\infty}\gamma_n(x)\le\Gamma(x)$

- $c>0$ 固定. $n\in\mathbb{Z}$, $n>c$ ← 問4

  $\gamma_n(x)\ge\int_0^c t^{x-1}f_n(t)\,dt$. $[0,c]$上一様に $f_n(t)\xrightarrow{n\to\infty}e^{-t}$

  $\therefore \lim_{n\to\infty}\gamma_n(x)\ge\lim_{n\to\infty}\int_0^c t^{x-1}f_n(t)\,dt = \int_0^c t^{x-1}e^{-t}dt$

  $c\to\infty$として 〃 $\ge\Gamma(x)$ $\square$

Thm. (Legendreの倍数公式) $z \in \mathbb{C}$, $z, z+\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$

11.33. $$\Gamma(z)\Gamma(z+\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\cdot 2^{1-2z}\cdot\Gamma(2z)$$

∵ $\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} n!\cdot n^z / z(z+1)\cdots(z+n) = \lim_{n\to\infty} n!\cdot n^z\cdot 2^{n+1}/2z(2z+2)\cdots(2z+2n)$

$\Gamma(z+\frac{1}{2}) = \lim_{n\to\infty} n!\cdot n^{z+\frac{1}{2}} 2^{n+1}/(2z+1)(2z+3)\cdots(2z+2n+1)$

$\Gamma(2z) = \lim n!\, n^{2z}/2z(2z+1)\cdots(2z+n) = \lim_{n\mapsto 2n+1} \underbrace{(2n+1)!\cdot(2n+1)^{2z}/2z(2z+1)\cdots(2z+2n+1)}_{G_n}$

$2^{2z-1}\cdot\Gamma(z)\cdot\Gamma(z+1/2)$

$= \lim 2^{2z-1}\cdot n^{2z+1/2}\cdot(n!)^2\cdot 2^{2n+2}/2z(2z+1)\cdots(2z+2n+1)$

$= \lim G_n\cdot 2^{2z-1}\cdot n^{1/2}\cdot\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2z}\cdot\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}\cdot 2^{2n+2}$

$= \lim G_n\cdot\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2z} 2^{2n+1}\cdot\sqrt{n}\cdot(n!)^2/(2n+1)!$

$= \lim G_n\cdot\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2z}\cdot\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!(\sqrt{n}+1/2\sqrt{n})}$

$= \Gamma(2z)\cdot 1\cdot\sqrt{\pi}$ ← Wallis公式 問5 □

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2\cdot 2^{2n}}{(2n)!\cdot\sqrt{n}}$$