現代数学基礎 CⅢ　12 月 14 日分課題解答

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

問題. p は $0 < p < 1$ を満たす実数とする. $z = e^{i\theta}$ と変数変換して z に関する複素積分を計算することで, 次の実積分 I の値を求めよ.

$$I := \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + p\cos\theta}.$$

解答. $z = e^{i\theta}$ と変数変換すると, $\cos\theta = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$ 及び $d\theta = \frac{1}{iz}dz$ から

$$I = \int_C \frac{dz/(iz)}{1 + p(z + z^{-1})/2}\, dz = \frac{2}{ip}\int_C \frac{dz}{z^2 + 2z/p + 1}\, dz.$$

但し C は原点中心の半径 1 の円に反時計回りの向きを入れたもの. 被積分関数 $f(z) := (z^2 + 2z/p + 1)^{-1}$ の極は $\alpha_\pm := -p^{-1} \pm \sqrt{p^{-2} - 1}$ で共に 1 位. 解と係数の関係 $\alpha_+\alpha_- = -2/p$, $\alpha_+\alpha_- = 1$ と仮定 $0 < p < 1$ から $0 > \alpha_+ > -1 > \alpha_-$ となるので, C の内部にあるのは α_+ だけ. すると留数定理から

$$I = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=\alpha_+} \frac{2}{ip} f(z) = \frac{4\pi}{p} \lim_{z\to\alpha_+} (z - \alpha_+) f(z) = \frac{4\pi}{p} \frac{1}{\alpha_+ - \alpha_-} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - p^2}}.$$

コメント. 講義ノート問題 8.1.3 と本質的に同じ問題です.

以上です.