

現代数学基礎 CIII 12月14日分演習問題

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)

連絡先: yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

<https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2023WC3.html>

問題 10.1 (講義ノート注意 10.1.1, 問題 10.1.1). 滑らかな曲線の接ベクトルに関して, その長さが正になること, その方向ベクトルが曲線のパラメータ表示の取り方に依存しないことを示せ.

問題 10.2 (講義ノート命題 10.3.1 証明). 複素関数 $F(z) := \frac{i-z}{i+z}$ と $G(w) := i\frac{1-w}{1+w}$ に関して, $F(G(w)) = w$, $G(F(z)) = z$, 及び $u, v \in \mathbb{R}$ に対して $\operatorname{Im} G(u + iv) = \frac{1-u^2-v^2}{(1+u)^2+v^2}$ となる事を示せ.

問題 10.3 (講義ノート定理 10.3.3, 問題 10.3.2). 単位円板 \mathbb{D} について, 任意の双正則写像 $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ が適当な $\theta \in \mathbb{R}$ と $\alpha \in \mathbb{D}$ を用いて

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha}z}$$

と書けることを, 以下の手順で示せ.

- (1) f に対しある $\alpha \in \mathbb{D}$ が存在して, $g := f \circ \psi_\alpha$ は双正則写像 $g: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ を定め, また $g(0) = 0$ である. 但し $\psi_\alpha(z) := \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha}z}$.
- (2) 任意の $z \in \mathbb{D}$ に対し $|z| = |g(z)|$. (g および g^{-1} に Schwarz の補題 (命題 10.3.2) を適用する.)
- (3) $g(z) = e^{i\theta} z$ と書ける. (再び Schwarz の補題を用いる.)
- (4) 主張を示せ.

解答は講義ノートの該当箇所を参照して下さい.