§10 等角写像　　　　12.14.1

§10.1.

Dfn. C: $\mathbb{C}$上の滑らかな曲線. $p(t) = x(t) + iy(t)$: Cのパラメータ表示 $(t \in \mathbb{R})$

$z_0 = p(t_0) \in C$. Cのz_0での(pに関する)接ベクトル:

$\begin{bmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ 又は $p'(t_0) = x'(t_0) + y'(t_0) \in \mathbb{C}$

Rmk. 10.1.1. (1) 接ベクトルの長さは正.　← 問1

(2) 〃 の方向ベクトル は pの取り方によらない.

Lem. 10.1.2. C, p, z_0: 同上. $U \subset \mathbb{C}$: Cを含む開集合.

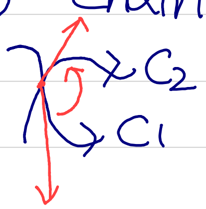
$f: U \to \mathbb{C}$, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. uとvは連続微分可能

$f(C)$: $f \circ p$をパラメータ表示とする滑らかな曲線

$\Rightarrow$ $f(C)$の$f(z_0)$での, $f \circ p$に関する接ベクトルは $\begin{bmatrix} u_x(x_0,y_0) & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{bmatrix}$

∵ chain rule. □

Dfn.



滑らかな二曲線C_1, C_2が点z_0で交わるとき.

C_1とC_2のz_0でのなす角度 := z_0での接ベクトルのなす角度

C_1からC_2に向かって反時計回りに測る.

Rmk 1.1.より パラメータ表示の取り方によらず well-defined. □

Dfn. $f(z) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$. uとvが連続微分可能, $z_0 \in$ (fの定義域)

fがz_0で等角 (又は共形) :$\Leftrightarrow$

$\begin{cases} z_0\text{を含むある開集合上で}f\text{が単射} \\ z_0\text{で交わる滑らかな曲線}C_1, C_2\text{に対し}, (C_1\text{と}C_2\text{の}z_0\text{での角度}) = (f(C_1)\text{と}f(C_2)\text{の}f(z_0)\text{での角度}) \end{cases}$ □

§10.2.

Thm. 10.2.1. f が z_0 で等角 $\iff$ f は z_0 で正則かつ $f'(z_0) \neq 0$.

[略証]. Lem.10.1.2.と逆写像定理から

f が z_0 で等角 $\iff$ $T := \begin{bmatrix} u_x(x_0,y_0) & u_y(\ , \ ) \\ v_x(\ , \ ) & v_y(\ , \ ) \end{bmatrix}$ (☆)

$\det T \neq 0$ かつ, ${}^\forall a, b \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\binom{0}{0}\}$

(aとbのなす角度) = (TaとTbのなす角度)

(☆)を仮定. $T\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ と $T\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ のなす角度 $= \frac{\pi}{2}$ ∴ $\begin{bmatrix}u_x\\v_x\end{bmatrix} = k\begin{bmatrix}v_y\\-u_y\end{bmatrix}$ $\exists k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$

$0 < {}^\forall\theta < \frac{\pi}{2}$ $T\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ と $T\begin{bmatrix}1\\ \tan\theta\end{bmatrix}$ 〃 $= \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix}1\\ \tan\theta\end{bmatrix}$ の角度 $= \theta$

$T\begin{bmatrix}1\\ \tan\theta\end{bmatrix} = T\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \tan\theta \cdot T\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ より, (左辺) $= k\theta$ ∴ $k=1$.

∴ $u_x = v_y$, $v_x = -u_y$. ∴ f は z_0 で正則

また $0 \neq \det T = u_x^2 + v_x^2 = |f'(z_0)|^2$.

(主張の右辺) ⇒ (☆) : 略 □

Eg. 10.2.3. は後で.

§10.3. 双正則写像

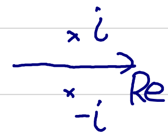
Dfn. $U, V \subset \mathbb{C}$: 開. $f : U \to V$ が双正則 $:\iff$ 全単射かつ正則 □

Lem. 双正則写像は定義域の全ての点で等角. □

Prp. 10.3.1. $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$: 上半平面, $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} ; |z| < 1\}$

$F : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$, $F(z) := \frac{i-z}{i+z}$ は双正則.

(∵) F は $\mathbb{H}$ 上正則. ${}^\forall z \in \mathbb{H}$ $|i-z| < |i+z|$ より $F(\mathbb{H}) \subset \mathbb{D}$



$G(w) := i\frac{1-w}{1+w}$ とすると $F(G(w)) = w$, $G(F(z)) = z$.

あとは $G(\mathbb{D}) \subset \mathbb{H}$ を示せば良いが $\operatorname{Im} G(u+iv) = \cdots = \frac{1-u^2-v^2}{(1+u)^2+v^2}$ □

← 問2

Prp. 10.3.2. (Schwarzの補題) $f: \mathbb{D} \to \mathbb{D}$. 双正則, $f(0)=0$

(1) $\forall z \in \mathbb{D}$ $|f(z)| \leq |z|$ 　$\exists c \in \mathbb{C}, |c|=1, f(z)=cz$

(2) $\exists z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ $|f(z_0)| = |z_0|$ $\Rightarrow$ fは回転

(3) $|f'(0)| \leq 1$. $|f'(0)| = 1$ $\Rightarrow$ 〃

(:) $f(z) = \sum_{n \geq 1} a_n z^n$: $z=0$中心でのTaylor展開.

$g(z) := f(z)/z = \sum_{n \geq 0} a_{n+1} z^n$ も$\mathbb{D}$上の正則関数

(1) $z \in \mathbb{D}$. $r := |z| < 1$. 仮定 $|f(z)| < 1$ より $|f(z)/z| < 1/r$.

最大値原理の系 Cor.8.2.6. $\Omega \subset \mathbb{C}$: 領域. s.t. $\overline{\Omega}$ コンパクト. $f: \Omega$上正則, $\overline{\Omega}$上連続

$\sup\{|f(z)| : z \in \Omega\} \leq \sup\{|f(z)| : \overline{\Omega} \setminus \Omega\}$

を $\Omega = D(0,r)$, $g(z)$に適用. $\Rightarrow \forall z \in \overline{D(0,r)}$, $|g(z)| < 1/r$

$r \nearrow 1$ として, $\forall z \in \mathbb{D}$, $|g(z)| = |f(z)/z| \leq 1$.

(2) 仮定と(1)より $|f(z)/z|$は$\mathbb{D}$で最大値をとる.

最大値原理 (Thm.8.2.5) より $f(z)/z = c$: 定数, $|c| = \left|\frac{f(z_0)}{z_0}\right| = 1$

(3) $g(z) = \frac{f(z) - f(0)}{z - 0}$ が正則なので $g(0) = \lim_{z \to 0} g(z) = f'(0)$.

(1)より $|f'(0)| = |g(z)| = |f(z)/z| \leq 1$.

$|f'(0)| = 1$ なら (1)より $|g|$は最大値をとる. ∴ $g(z)$=定数. (2)と同様 □

Thm. 10.3.3. $\forall f: \mathbb{D} \to \mathbb{D}$: 双正則. $\exists \theta \in \mathbb{R}$, $\exists \alpha \in \mathbb{D}$ $f(z) = e^{i\theta} \cdot \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha} z}$

(:) 問3. □

§10.4. Riemannの写像定理

Thm. 10.4.1. $\phi \neq \forall\Omega \subsetneq \mathbb{C}$, 単連結領域. $\forall z_0 \in \Omega$.
$\exists F \to \mathbb{D}$: 双正則写像. $F(z_0)=0$, $F'(z_0)>0$. $\in \mathbb{R}_{>0}$ $\square$

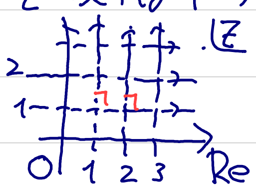
Cor. 10.4.2. $\phi \neq \Omega, \Omega' \subsetneq \mathbb{C}$: 単連結領域. $\exists F : \Omega \to \Omega'$ 双正則
(ΩとΩ'は共形同値) $\square$

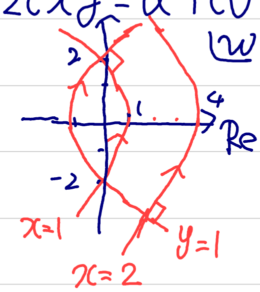
§10.2. Eg. 10.2.3. (等角写像の例)

(1) $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(z)=cz+d$, $c\neq 0$: 回転,拡大,平行移動の合成.

(2) $n\in\mathbb{Z}_{>0}$, $U := \{z\in\mathbb{C} \mid z\neq 0,\ 0<\arg z<\pi/n\}$. $f: U\to\mathbb{C}$, $f(z)=z^n$

$n=2$: $z=x+iy \longmapsto (x^2-y^2)+2ixy = u+iv = w$





$x=1$: $u=1-y^2$, $v=2y$
$\quad = 1-\frac{1}{4}v^2$

x fix : $u = x^2 - v^2/4x^2$

$y=1$: $u=-1+\frac{1}{4}v^2$

(4) $f: \mathbb{H}\to\mathbb{C}$, $f(z)=\mathrm{Log}\, z$

$w=f(re^{i\theta}) = \log r + i\theta \qquad 0<\theta<\pi.$