現代数学基礎 CIII　12 月 07 日 中間試験解答

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

問題 1. z を複素変数とし, $f(z)$ をその複素関数とする.

(1) z の実部と虚部への分解を $z = x + iy$ とし, また $f(z)$ の極座標表示を

$$f(z) = R(x,y)\big(\cos\varphi(x,y) + i\sin\varphi(x,y)\big)$$

とする. $f(z)$ の z に関する Cauchy-Riemann 方程式は次のように書けることを示せ.

$$\frac{\partial R}{\partial x} = R\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = -R\frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

(2) $f(z)$ が正則かつ $|f(z)|$ が定数の時, $f(z)$ も定数であることを示せ.

解答. 偏微分を $R_x \coloneqq \frac{\partial R}{\partial x}$ のように略記する.

(1) $f = u + iv$ と書くと $u = R\cos\varphi$, $v = R\sin\varphi$ であり, 微分の連鎖律から

$$\begin{aligned} u_x &= u_R R_x + u_\varphi \varphi_x = \cos\varphi \cdot R_x - R\sin\varphi\cdot\varphi_x, \quad & u_y &= u_R R_y + u_\varphi\varphi_y = \cos\varphi\cdot R_y - R\sin\varphi\cdot\varphi_y, \\ v_x &= v_R R_x + v_\varphi\varphi_x = \sin\varphi\cdot R_x + R\cos\varphi\cdot\varphi_x, \quad & v_y &= v_R R_y + v_\varphi\varphi_y = \sin\varphi\cdot R_y + R\cos\varphi\cdot\varphi_y. \end{aligned}$$

従って Cauchy-Riemann 方程式 $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ はそれぞれ

$$\cos\varphi\cdot R_x - R\sin\varphi\cdot\varphi_x = \sin\varphi\cdot R_y + R\cos\varphi\cdot\varphi_y, \tag{a}$$

$$\cos\varphi\cdot R_y - R\sin\varphi\cdot\varphi_y = -\sin\varphi\cdot R_x - R\cos\varphi\cdot\varphi_x \tag{b}$$

と書ける. $(a)\times\cos\varphi + (b)\times\sin\varphi$ 及び $(a)\times\sin\varphi - (b)\times\cos\varphi$ から結論を得る.

(2) 極座標表示 $f = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ で R が定数だから $R_x = R_y = 0$. すると (1) より $\varphi_x = \varphi_y = 0$ となり, φ も定数. 従って f は定数である.

コメント. (1) を 10 点, (2) を 10 点として, 計 20 点満点で採点しました. 平均点は 13.1 点でした.

(1) で「(a) の両辺の $\sin\varphi$ と $\cos\varphi$ の係数を比較して」と議論している解答がありましたが, 誤りです. φ の関数として $\sin\varphi$ と $\cos\varphi$ は線形独立ですが, この問題では φ は独立変数ではないので, 線形独立だとは限りません.

(2) の示し方は色々あって, 例えば整関数に関する Liouville の定理を使っても示せます.

問題 2. 以下の複素変数 z の函数を, 括弧内の点を中心として Taylor 展開し, 全ての非負整数 n に対して n 次の係数を明示せよ.

(1) $\cos z$ $[z = \pi/4]$.

(2) $\displaystyle\int_0^z \exp(-\zeta^2)\,d\zeta$ $[z = 0]$. 但し積分路は 0 から z へ向かう線分とする.

解答. (1) $\cos z = \cos((z-\pi/4)+\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(z-\pi/4) - \sin(z-\pi/4))$
$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n)!}(z-\pi/4)^{2n} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z-\pi/4)^{2n+1}$.

(2) $\exp(-\zeta^2) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!}\zeta^{2n}$ は任意の $\zeta\in\mathbb{C}$ に対して絶対収束するから, 広義一様収束し, 項別積分できる. よって $\int_0^z \exp(-\zeta^2)d\zeta = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^z \zeta^{2n}d\zeta = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}z^{2n+1}$.

コメント. (1) を 10 点, (2) を 10 点として, 計 20 点満点で採点しました. 平均点は 13.6 点でした.

(1) は n の偶奇で分けずに $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2})(z - \frac{\pi}{4})^n$ 又は $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\sqrt{2}} (-1)^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} (z - \frac{\pi}{4})^n$ と書くこともできます.

問題 3. $z = 0$ での Taylor 展開

$$z \cot z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{B_n}{(2n)!} (2iz)^{2n}$$

によって $B_n \in \mathbb{C}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ を定める.

(1) B_1 と B_2 を求めよ.

(2) 関数 $\dfrac{1}{\exp(z) - 1}$ を $z = 0$ を中心として Laurent 展開し, 全ての非負整数 k に対して k 次の係数を B_n を用いて表せ.

解答. (1) $z \cot z = iz \dfrac{e^{iz} + e^{iz}}{e^{iz} - e^{iz}} = iz \dfrac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1} = \dfrac{2iz}{e^{2iz} - 1} + iz$ より, $\zeta := 2iz$ と置いて

$$\frac{\zeta}{e^{\zeta} - 1} + \frac{\zeta}{2} = 1 + \frac{B_1}{2!} \zeta^2 - \frac{B_2}{4!} \zeta^4 + \cdots. \tag{\#}$$

一方で $\dfrac{\zeta}{e^{\zeta} - 1} = \dfrac{1}{1 + \zeta/2! + \zeta^2/3! + \cdots}$ だから

$$\left(1 - \frac{1}{2}\zeta + \frac{B_2}{2!}\zeta^2 - \frac{B_2}{4!}\zeta^4 + \cdots\right)\left(1 + \frac{B_1}{2!}\zeta^2 - \frac{B_2}{4!}\zeta^4 + \cdots\right) = 1.$$

左辺を展開して ζ^1, ζ^2 の係数を右辺と比較すると

$$-\frac{1}{2!2} + \frac{B_!}{2} + \frac{1}{3!} = 0, \quad \frac{1}{5!} - \frac{1}{4!2} + \frac{B_!}{3!2!} - \frac{B_2}{4!} = 0.$$

これから $B_1 = 1/6$, $B_2 = 1/30$.

(2) 上の (#) より

$$\frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n B_n}{(2n)!} z^{2n-1}.$$

コメント. (1) を 10 点, (2) を 10 点として, 計 20 点満点で採点しました. 平均点は 6.9 点でした.

問題 4. 複素積分を利用して, 実積分に関する次の等式 $(*)$ を示そう.

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}. \tag{$*$}$$

(1) 下図のような, 実軸上の二つの部分と大きい半円 C_R^+ 及び小さい半円 C_r^- とからなる積分路 C 上で,

$$I := \int_C f(z)\, dz, \quad f(z) := \frac{1 - \exp(iz)}{z^2}$$

なる複素積分を考える. I の値を求めよ.

(2) I を次の四つの部分に分ける:

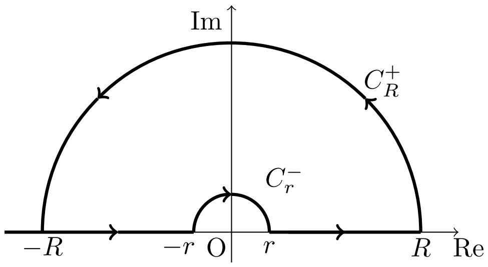
$$I = I_+ + I_R + I_- + I_r, \quad I_+ := \int_r^R f(x) dx, \quad I_R := \int_{C_R^+} f(z) dz, \quad I_- := \int_{-R}^{-r} f(x) dx, \quad I_r := \int_{C_r^-} f(z) dz.$$

$\lim_{R \to \infty} I_R = 0$ を示せ.

(3) $f(z)$ を $z=0$ 中心で Laurent 展開せよ．特に留数を求めよ．

(4) 前項を参考に，$\lim_{r\to 0} I_r$ を求めよ．

(5) 以上から $(*)$ を導け．



解答． (1) $f(z)$ は積分路とその内部で正則だから，Cauchy の積分定理より $I=0$.

(2) $|I_R| \le \ell(C_R)\cdot \sup\{|f(z)|\,;z\in C_R\} = \pi R\cdot \frac{1}{R^2}\sup\{\left|1-e^{iz}\right|;z\in C_R\} \le \frac{2\pi}{R} \xrightarrow{R\to\infty} 0$.

(3) $f(z)=(1-\sum_{n=0}^{\infty}(iz)^n/n!)/z^2 = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n!}z^{n-2} = -i/z+\cdots$ なので，留数は $-i$.

(4) $z=re^{i\theta}$ と変数変換して，$g(r,\theta) \coloneqq f(z)+i/z$ と置くと

$$I_r = \int_\pi^0 \Big(-\frac{i}{re^{i\theta}} + g(r,\theta)\Big) ire^{i\theta}\,d\theta = \int_\pi^0 d\theta + \int_\pi^0 ire^{i\theta} g(r,\theta)\,d\theta.$$

前項より g は z の関数として正則だから，積分領域上で有界．よって

$$\left|I_r - \int_\pi^0 d\theta\right| \le (\text{定数})\cdot \int_0^\pi \left|ire^{i\theta}\right| d\theta = r\cdot(\text{定数}) \xrightarrow{r\to 0} 0.$$

よって $\lim_{r\to 0} I_r = \int_\pi^0 d\theta = -\pi$.

(5) $I_+ + I_R + I_- + I_r = 0$ で $R\to\infty$, $r\to 0$ として $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-e^{ix}}{x^2}dx - \pi = 0$. 実部を取って $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}dx = \pi$. 非積分函数は偶函数だから，$(*)$ が得られる．

コメント． 各小問を 10 点として，計 50 点満点で採点しました．平均点は 24.2 点でした．

(1) では Cauchy の積分定理を適用できる理由に 5 点，(2) では不等式評価 $|f(z)| \le 2/R$ $(z\in C_R)$ に 5 点，(4) では項別積分できる理由に 5 点配点しています．

全体のコメント

計 $20+20+20+50=110$ 点で採点しました．平均点は $13.1+13.6+6.9+24.2=56.7$ 点でした．答案 1 枚目の名前欄の横に xx 点と書いてあるのが点数です．得点分布は次の通りです．

得点	–29	30–49	50–74	75–94	95–
人数	7	13	15	14	5

以上です．