Macdonald 多項式

神戸大学 2023 年度 特別講義 可積分系 B
2023.11.20–24

担当: 柳田 伸太郎 (名大多元)

ver. 2023.12.09

目次

0　講義の概要

内容

初心者向け説明

Macdonald 多項式はルート系対称性を持った多変数 q 直交多項式系で, 近年様々な数学に現れています．この講義の目標は, 代数的表現論やそれに関連した特殊函数論に興味を持つ人を主な対象として, 対称多項式 (GL 型) の場合を中心に Macdonald 多項式の理論の入門的概説をすることです．

この講義の全般的な参考文献は, 近刊の

[N23] M. Noumi, “Macdonald Polynomials — Commuting Family of q-Difference Operators and Their Joint Eigenfunctions”, Springer Briefs in Math. Phys., Springer, 2023

です．また, その講義録版とも言える

[野 22] 野海正俊 述, 齋藤洋介 記, “Macdonald 多項式入門”, OCAMI Preprint Series, 22-16, 2022

も参考になります．その他に, 日本語で書かれている Macdonald 多項式の解説が [白 03] – [三 04] など多数あります．

Macdonald 多項式のことを何も知らない人には, とりあえず [野 22, 第 0 章] を眺めてみることをお勧めします．

知識がある人向け説明

本稿の執筆は [N23] (及び [野 22]) の読書ノートとして始まりました[*1]．集中講義も基本的に [N23] に沿って有限変数版の Macdonald 対称多項式の話をしますが, 細かい点で差異があります．

- 対称多項式と対称函数:
  Macdonald-Cauchy 核や Pieri 公式といった変数の数によらない話については, [M95] に従って対称函数 (無限変数対称多項式) を使って議論します (§ 3)．そのため, 本稿には論理的一貫性に欠ける面がありますが, Macdonald 対称函数の話も是非知っておいて欲しいと思ってこの方針にしました．また細かいことですが, 無限変数の Macdonald 対称函数の射影によって, [N23] の方針で導入した有限変数の Macdonald 対称多項式が得られることの証明を書き下してみました (定理 3.1.2, § 3.2)．
- アフィン Hecke 環:
  アフィン Hecke 環による Macdonald 多項式へのアプローチ (Macdonald-Cherednik 理論) は, [N23] では最終章で概説されているだけですが, 本稿ではもう少し詳しく扱うことにしました (§ 4)．また本文では GL 型しか扱いませんが, 付録 A で一般のルート系の話を概説します．
- 二重アフィン Hecke 環 (DAHA):
  DAHA についても [N23] より詳しく扱うことにしました (§ 5)．特に Oblomkov の論文 [Ob04] を通じて, Ruijsenaars-Shneider 系の変形量子化としての Macdonald-Ruijsenaars 系を, 幾何学的視点も交えて説明します．

[*1] 筆者が理解する限り, [N23] の執筆動機は, 有限変数の議論だけ使って Macdonald 対称多項式の理論を構成し, [M95, Chapter VI] にある諸性質の再導出をする, ということだと思います．その点で [N23] は非常に価値のある文献です．

構成

集中講義の日程と合わせて説明します．11/23 (木) が祝日のため講義は 4 日間です．

1 日目 とりあえず主対象を見せることを主眼として，かなり天下り的に Macdonald 対称多項式を導入します．一意存在定理 1.3.3 の紹介が最初の目標です．また，2 変数の場合を中心に遊んでみます (§ 1)．

2 日目 高階の Macdonald-Ruijsenaars q 差分作用素を導入して，それらの可換性定理 2.2.1 (これも認める) から定理 1.3.3 が従うことを説明します (§ 2.1, § 2.2)．冒頭に書いたように Macdonald 多項式は直交函数系をなします (§ 2.3)．直交性と特殊値の対称性 (双対性, § 2.4) とが，GL 型に限らず，一般の Macdonald 多項式に見られる基本性質です．これらの紹介をします．
続いて § 3 では，[M95] に従って，GL 型で明瞭になる性質[*2]を対称函数の理論を使って紹介します．

3 日目 この時点で示していない Macdonald-Ruijsenaars q 差分作用素の可換性定理 2.2.1 の証明を主目的として，アフィン Hecke 環によるアプローチ (Macdonald-Cherednik 理論) を GL 型の場合に説明します (§ 4)．論理的には，この時点で Macdonald 対称多項式の一意存在定理 1.3.3 の証明が完結します．

4 日目 特殊値対称性定理 2.4.2 の証明を主目的として，GL 型 DAHA (二重アフィン Hecke 環) を導入します (§ 5.1, § 5.2)．残った時間で変形量子化としての DAHA [Ob04] の概説をします (§ 5.3, § 5.4)．

レポート問題

各節末にレポート問題があります．単位が欲しい人は **1 題以上**解答して提出して下さい．部分的な解答でも構いません．**おすすめ問題**は

問題 1.1,　問題 3.1,　問題 4.1,　問題 4.2.

全般的な記号

これ以降，本文は断定形で書く．

- $A := B$ は，A を B で定義することを表す．$A :\Longleftrightarrow B$ は，A を条件 B で定義することを表す．
- $\mathbb{Z}$ は整数環，$\mathbb{Q}$ は有理数体，$\mathbb{R}$ は実数体，$\mathbb{C}$ は複素数体を表す．
- $\mathbb{N} := \mathbb{Z}_{\geq 0} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ は非負整数全体のなす集合を表す．
- 有限集合 S に対し，その濃度 (元の個数) を $\#S$ 又は $|S|$ で表す．
- 集合 S 上の Kronecker デルタを，$s, t \in S$ に対して $\delta_{s,t} := 1$ $(s = t)$, 0 $(s \neq t)$ で定める．
- 断らない限り，環や代数といったら単位元を持つ結合的なものを意味する．
- 群の単位元を 1 と書く．
- 群 G の生成元 X と関係式 R による表示を $G = \langle X \mid R \rangle_{\mathrm{grp}}$ と表す．また群 G とその部分集合 X が与えられたとき，X が生成する G の部分群を $\langle X \rangle_{\mathrm{grp}}$ で表す．特に部分集合が $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ と列挙されているときは $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle_{\mathrm{grp}}$ で表す．
- 群の場合と同様に，可換環 $\mathbb{F}$ 上の代数 A の生成元 X と関係式 R による表示を $A = \langle X \mid R \rangle_{\mathbb{F}\text{-alg}}$ と表す．$\mathbb{F}$ 代数 A とその部分集合 X が与えられたとき，X が生成する A の部分 $\mathbb{F}$ 代数を $\langle X \rangle_{\mathbb{F}\text{-alg}}$ で表す．

[*2] Pieri 公式やタブロー表示の特別な場合など，一部の性質は他のルート系でも知られていますが，一般の場合の “良い” 公式を一般のルート系の場合に見出すことは未解決問題 (のはず) です．

1 Macdonald 対称多項式の概要

1.1 対称群と対称多項式

$n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し, 集合 $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$ の置換群 $\mathrm{Aut}([n])$ を n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ と呼ぶ. その元 $\sigma \in S_n$ を

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i & \cdots & n-1 & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(i) & \cdots & \sigma(n-1) & \sigma(n) \end{pmatrix} \tag{1.1.1}$$

と表し, 置換と呼ぶ. 置換群の定義から, 群 $\mathfrak{S}_n$ の積は置換 $\sigma\colon [n] \to [n]$ の合成である. つまり

$$\sigma\tau := \sigma \circ \tau, \quad (\sigma\tau)(i) = \sigma(\tau(i)) \quad (i \in [n]).$$

写像の合成は結合的なので, 群の結合律 $(\sigma\tau)\mu = \sigma(\tau\mu)$ $(\sigma, \tau, \mu \in \mathfrak{S}_n)$ が成立する. また, (1.1.1) の $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ の逆元は $\sigma^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{smallmatrix}\right)$ であり, 群 $\mathfrak{S}_n$ の単位元は恒等置換 $1 = \mathrm{id}_{[n]} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{smallmatrix}\right)$ である.

$s_i \in \mathfrak{S}_n$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ を次で定義する.

$$s_i := (i, i+1) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i & i+1 & \cdots & n \\ 1 & \cdots & i+1 & i & \cdots & n \end{pmatrix}. \tag{1.1.2}$$

$\mathfrak{S}_n$ は $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$ によって生成され, 以下の関係式を満たす.

$$s_i^2 = 1, \quad s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}, \quad s_i s_j = s_j s_i \quad (|i-j| > 1). \tag{1.1.3}$$

可換環 R と n 文字 $x = (x_1, \ldots, x_n)$ に対し, R 係数の n 変数多項式環を

$$R[x] = R[x_1, \ldots, x_n]$$

と表す. 対称群 $\mathfrak{S}_n$ は x の添え字の置換で作用する:

$$\sigma.x_i := x_{\sigma(i)} \quad (\sigma \in \mathfrak{S}_n,\ i \in [n]). \tag{1.1.4}$$

x の単項式を $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ $(\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n)$ と表すと, $\mathfrak{S}_n$ の作用を

$$\sigma.x^\alpha := x_{\sigma(1)}^{\alpha_1} \cdots x_{\sigma(n)}^{\alpha_n} \tag{1.1.5}$$

と拡張できる. 更に R 線形に拡張することで, $\mathfrak{S}_n$ の $R[x]$ への忠実な作用 (群の単射準同型) $\mathfrak{S}_n \to \mathrm{Aut}(R[x])$ が定まる. つまり, 任意の多項式 $f \in R[x]$ に対して次が成立する.

$$1.f = f, \quad \sigma.(\tau.f) = (\sigma.\tau).f \quad (\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n),$$

定義 1.1.1. 多項式環 $R[x]$ の対称多項式とは, 任意の $\sigma \in S_n$ に対して $\sigma.f = f$ となる元 $f \in R[x]$ のことである. 対称多項式全体のなす集合

$$R[x]^{\mathfrak{S}_n} := \{R[x] \text{ の対称多項式 }\} = \{f \in R[x] \mid \sigma.f = f\ (\forall\, \sigma \in \mathfrak{S}_n)\}$$

は $R[x]$ の部分環であり, 特に可換環. $R[x]^{\mathfrak{S}_n}$ を**対称多項式環** (ring of symmetric polynomials) と呼ぶ.

いわゆる対称式の基本定理とは, 対称多項式環の構造定理のことである.

事実 1.1.2 (c.f. [岡 06, 定理 9.2])**.** 対称多項式環は**基本対称式** (elementary symmetric polynomial)

$$e_r(x) := \textstyle\sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_r \le n} x_{j_1} \cdots x_{j_r} \tag{1.1.6}$$

の多項式環である:

$$R[x_1, \ldots, x_n]^{S_n} = R[e_1(x), \ldots, e_n(x)].$$

1.2　単項対称式と対称多項式空間の基底

多項式環 $R[x]=R[x_1,\dots,x_n]$ への対称群の作用 (1.1.4), (1.1.5) を思い出そう．$\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{N}^n$ として, $x^\alpha=x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$ への $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ の作用は

$$\sigma.x^\alpha=\sigma.(x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n})=x_{\sigma(1)}^{\alpha_1}\cdots x_{\sigma(n)}^{\alpha_n}=x_1^{\alpha_{\sigma^{-1}(1)}}\cdots x_n^{\alpha_{\sigma^{-1}(n)}}$$

となる．そこで $\mathfrak{S}_n$ の $\mathbb{N}^n$ への作用を

$$\sigma.\alpha=\sigma.(\alpha_1,\dots,\alpha_n):=(\alpha_{\sigma(1)},\dots,\alpha_{\sigma(n)})\quad(\sigma\in\mathfrak{S}_n,\ \alpha\in\mathbb{N}^n) \tag{1.2.1}$$

と定めると,

$$\sigma.x^\alpha=x^{\sigma^{-1}.\alpha}\quad(\sigma\in\mathfrak{S}_n,\ \alpha\in\mathbb{N}^n). \tag{1.2.2}$$

次の主張の証明は省略する．

補題 1.2.1. 作用 (1.2.1) による $\mathbb{N}^n$ の $\mathfrak{S}_n$ 軌道分解は

$$\mathbb{N}^n=\textstyle\bigsqcup_{\lambda\in\mathcal{P}_n}\mathfrak{S}_n.\lambda.$$

但し $\mathcal{P}_n$ は長さ n 以下の分割 (分割の長さは (3.1.1) で定義する) 全体がなす集合である:

$$\mathcal{P}_n:=\{\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{N}^n\mid\lambda_1\geq\cdots\geq\lambda_n\}.$$

[M95] に従って, $\mathbb{Z}$ 係数の n 変数対称多項式環を次のように表す．

$$\Lambda_n:=\mathbb{Z}[x]^{\mathfrak{S}_n}.$$

定義 1.2.2. $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathcal{P}_n$ に対し, 単項対称式 $m_\lambda\in\Lambda_n$ を次で定義する．

$$m_\lambda(x):=\sum_{\alpha\in\mathfrak{S}_n.\lambda}x^\alpha=\sum_{\substack{\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n):\\ \text{相違なる }\lambda\text{ の置換}}}x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}.$$

但し $\mathfrak{S}_n.\lambda$ は作用 (1.2.1) による $\lambda\in\mathbb{N}^n$ の $\mathfrak{S}_n$ 軌道.

例 1.2.3. $n=3$ の場合, $m_\lambda(x)=m_\lambda(x_1,x_2,x_3)$ を幾つか書き下すと

$$\begin{aligned}
m_{(3)}(x)&=\sum_{\alpha\in\mathfrak{S}_3.(3,0,0)}x^\alpha=x^{(3,0,0)}+x^{(0,3,0)}+x^{(0,0,3)}=x_1^3+x_2^3+x_3^3,\\
m_{(2,1)}(x)&=\sum_{\alpha\in\mathfrak{S}_3.(2,1,0)}x^\alpha=x^{(2,1,0)}+x^{(2,0,1)}+x^{(1,2,0)}+x^{(1,0,2)}+x^{(0,2,1)}+x^{(0,1,2)}\\
&\qquad=x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_1x_2^2+x_1x_3^2+x_2-2x_3+x_2x_3^2,\\
m_{(1^3)}(x)&=\sum_{\alpha\in\mathfrak{S}_3.(1,1,1)}x^\alpha=x^{(1,1,1)}=x_1x_2x_3.
\end{aligned}$$

但し分割の成分 0 を省略して $(3)=(3,0,0)$, $(2,1)=(2,1,0)$ と書いた．

$\lambda\in\mathcal{P}_n$ が特別な場合の単項対称式には別名がついている．

定義 1.2.4. $r=0,\dots,n$ に対し, (1.1.6) の基本対称式 e_r は分割 $(1^r) := (\overbrace{1,\dots,1}^{r},0,\dots,0) \in \mathcal{P}_n$ の単項対称式 $m_{(1^r)}$ と一致する.

$$m_{(1^r)}(x) = e_r(x) := \textstyle\sum_{1\le j_1<\cdots<j_r\le n} x_{j_1}\cdots x_{j_r}.$$

定義 1.2.5. $r=0,\dots,n$ に対し, 冪和対称式 (power sum (symmetric) polynomial) p_r は分割 $(r) := (r,0,\dots,0) \in \mathcal{P}_n$ の単項対称式と一致する.

$$m_{(r)}(x) = p_r(x) := \textstyle\sum_{i=1}^n x_i^r.$$

定義 1.2.6. $r=0,\dots,n$ に対し, 完全対称式 (completely homogeneous symmetric polynomial)

$$h_r(x) := \textstyle\sum_{1\le j_1\le\cdots\le j_r\le n} x_{j_1}\cdots x_{j_r}$$

は, (長さ n 以下の) 分割 λ で総和 $|\lambda| := \lambda_1+\cdots+\lambda_n$ が r のものの単項対称式 m_λ 全ての和と一致する.

$$h_r(x) = \textstyle\sum_{\lambda\in\mathcal{P}_n, |\lambda|=r} m_\lambda(x).$$

命題 1.2.7. Λ_n は $\{m_\lambda \mid \lambda\in\mathcal{P}_n\}$ を基底とする自由加群である. つまり

$$\Lambda_n = \textstyle\bigoplus_{\lambda\in\mathcal{P}_n} \mathbb{Z} m_\lambda.$$

命題 1.2.7 は多項式環の次数構造を用いると証明しやすい. $\deg x_i := 1$ によって, 可換環 R に係数を持つ多項式 $f\in R[x]$ の次数 $\deg f \in \mathbb{N}$ が定まる. 多項式環 $R[x]$ は加群としての直和分解

$$R[x] = \textstyle\bigoplus_{d\in\mathbb{N}} R[x]^d, \quad R[x]^d := \{f\in R[x] \mid \deg f = d\}$$

および, $\mathbb{N}$ 次数環の構造 $R[x]^c\cdot R[x]^d \subset R[x]^{c+d}$ を持つ. また, $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{N}^n$ に対して

$$|\alpha| := \textstyle\sum_{i=1}^n \alpha_i$$

と定めれば, 各斉次成分 $R[x]^d$ は次の基底を持つ自由加群である.

$$R[x]^d = \textstyle\bigoplus_{\alpha\in\mathbb{N}^n, |\alpha|=d} R x^\alpha.$$

対称多項式環 $\Lambda_n = \mathbb{Z}[x]^{\mathfrak{S}_n}$ は $\mathbb{Z}[x]$ の部分環だから, $\mathbb{N}$ 次数環構造が誘導される:

$$\Lambda_n = \textstyle\bigoplus_{d\in\mathbb{N}} \Lambda_n^d, \quad \Lambda_n^d := \{f\in\Lambda_n \mid \deg f = d\}, \tag{1.2.3}$$

ここで, (基底になるはずの) 単項対称式 $m_\lambda = \sum_{\alpha\in\mathfrak{S}_n.\lambda} x^\alpha$ ($\lambda\in\mathcal{P}_n$) の次数が $\deg m_\lambda = |\lambda|$ であることから, $\mathcal{P}_n$ を次のように集合分割しよう.

$$\mathcal{P}_n = \textstyle\bigsqcup_{d\ge 0} \mathcal{P}_n^d, \quad \mathcal{P}_n^d := \{\lambda\in\mathcal{P}_n \mid |\lambda| = d\}.$$

命題 1.2.7 の証明. 各 $d\in\mathbb{N}$ に対して $\Lambda_n^d = \bigoplus_{\lambda\in\mathcal{P}_n^d} \mathbb{Z} m_\lambda$ を示せば良い. 任意の $f\in\Lambda_n^d$ は

$$f(x) = \textstyle\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n,\, |\alpha|=d} c_\alpha x^\alpha \quad (c_\alpha\in\mathbb{Z})$$

と一意に書ける. f は対称多項式だから, 任意の $w\in S_n$ に対して $w.f = f$. 作用 (1.2.2) を思い出すと

$$w.f = \textstyle\sum_\alpha c_\alpha x^{w^{-1}.\alpha} = \sum_\alpha c_{w.\alpha} x^\alpha$$

だから, $w.f=f$ より $c_{w.\alpha} = c_\alpha$ が従う. すると補題 1.2.1 から

$$f = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n, |\alpha|=d} c_\alpha x^\alpha = \sum_{\lambda\in\mathcal{P}_n^d}\sum_{\alpha\in\mathfrak{S}_n.\lambda} c_\alpha x^\alpha = \sum_{\lambda\in\mathcal{P}_n^d} c_\lambda \sum_{\alpha\in\mathfrak{S}_n.\lambda} c_\alpha x^\alpha = \sum_{\lambda\in\mathcal{P}_n^d} c_\lambda m_\lambda(x).$$

よって f は m_λ の線形結合として一意に書ける. □

1.3 Macdonald-Ruijsenaars 差分作用素と Macdonald 対称多項式

2 パラメータ q,t の $\mathbb{Q}$ 係数有理函数体を $\mathbb{F} := \mathbb{Q}(q,t)$ と書く．引き続き n 変数 $x = (x_1,\dots,x_n)$ を取り，今までの議論の係数環 R を $\mathbb{F}$ にして多項式環 $\mathbb{F}[x] := \mathbb{F}[x_1,\dots,x_n]$ を考える．また，$\mathbb{Z}$ 係数対称多項式環 $\Lambda_n = \mathbb{Z}[x]^{\mathfrak{S}_n}$ の係数拡大を次のように表す．

$$\Lambda_{n,\mathbb{F}} := \Lambda_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F} = \mathbb{F}[x]^{\mathfrak{S}_n}.$$

すぐに有理式が必要になるので，$\mathbb{F}$ 係数の有理函数体の記号 $\mathbb{F}(x) = \mathbb{F}(x_1,\dots,x_n)$ も用意しておく．対称群 $\mathfrak{S}_n$ の $\mathbb{F}[x]$ への作用は自然に $\mathbb{F}(x)$ への作用に延長される．

可逆元 $p \in \mathbb{F}^\times$ と $i = 1,\dots,n$ に対して，$\mathbb{F}(x)$ 上の線形作用素 $T_{p,x_i} \colon \mathbb{F}(x) \to \mathbb{F}(x)$ を

$$(T_{p,x_i} f)(x_1,\dots,x_n) := f(x_1,\dots,px_i,\dots,x_n) \quad (f(x) \in \mathbb{F}(x)) \tag{1.3.1}$$

で定め，変数 x_i の p シフト作用素と呼ぶ．これは $T_{p,x_k}^{-1} = T_{p^{-1},x}$ を逆変換とする，可逆な作用素である．

定義 1.3.1. $\mathbb{F}(x)$ 上の作用素 $D_x = D_x(q,t)$ を次で定義し，1 階の Macdonald-Ruijsenaars q 差分作用素と呼ぶ．

$$D_x := \sum_{i=1}^{n} \Bigl(\prod_{\substack{1 \le j \le n \\ j \ne i}} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j} \Bigr) T_{q,x_i}.$$

注意 1.3.2. D_x は，Ruijsenaars が [R87] で導入した楕円函数係数の q 差分作用素の可換族 $\{D_x^{(r)}(p) \mid r = 1,\dots,n\}$ の $p \to 0$ 極限の $r = 1$ の場合である．

Macdonald 対称多項式とは，次の条件 (i) を満たす D_x の固有函数のことである．

定理 1.3.3. 各 $\lambda \in \mathcal{P}_n$ に対し，以下の条件を満たす $P_\lambda = P_\lambda(x;q,t) \in \Lambda_{n,\mathbb{F}}$ が一意に存在する．

(i) [三角性] $P_\lambda \in m_\lambda + \sum_{\mu<\lambda} \mathbb{F} m_\mu$．但し $\mathcal{P}_n$ 上のドミナンス順序 $\le$ (定義 1.3.4 参照) を用いた．

(ii) [固有性] P_λ は D_x の固有函数．

更に (ii) における固有値は $d_\lambda := \sum_{i=1}^n q^{\lambda_i} t^{n-i}$．$P_\lambda$ を分割 λ の Macdonald 対称多項式と呼ぶ．

定義 1.3.4. $\mathcal{P}_n$ 上の半順序 $\le$ を次で定義し，ドミナンス順序と呼ぶ．

$$\mu \le \lambda :\iff |\mu| = |\lambda| \quad \text{かつ} \quad \mu_1 + \cdots + \mu_k \le \lambda_1 + \cdots + \lambda_k \ \ \forall k = 1,2,\dots. \tag{1.3.2}$$

注意 1.3.5. 総和 d の部分 $\mathcal{P}_n^d \subset \mathcal{P}_n$ の上では，$d \le 5$ ならドミナンス順序は全順序である．

$$\begin{aligned}
&(2) > (1,1),\\
&(3) > (2,1) > (1,1,1),\\
&(4) > (3,1) > (2,2) > (2,1,1) > (1,1,1,1),\\
&(5) > (4,1) > (3,2) > (3,1^2) > (2^2,1) > (2,1^3) > (1^5).
\end{aligned}$$

但し $(2) = (2.0)$，$(3) = (3,0,0)$ 等と 0 成分は省略して書いた．しかし $d \ge 6$ だと真に半順序である．

$$(6) > (5,1) > (4,2) \begin{matrix} > (4,1^2) > \\ > (3^2) > \end{matrix} (3,2,1) \begin{matrix} > (3,1^3) > \\ > (2^3) > \end{matrix} (2^2,1^2) > (2,1^4) > (1^6).$$

ひとまず定理 1.3.3 を認めて, それから簡単に得られる帰結を見ていこう.

例 1.3.6. 任意の $r = 0, \ldots, n$ に対し, $P_{(1^r)}$ は基本対称式 e_r (1.1.6) と等しい.

$$P_{(1^r)}(x; q, t) = m_{(1^r)}(x) = e_r(x).$$

実際, 順序集合 $(\mathcal{P}_n^r, \leq)$ において (1^r) は最小元なので, 定理 1.3.3 条件 (i) から $P_{(1^r)} = m_{(1^r)}$ である. 特に $P_{(1^r)}$ はパラメータ q, t に依存しないことに注意する.

系 1.3.7. $\{P_\lambda \mid \lambda \in \mathcal{P}_n\}$ は $\Lambda_{n,\mathbb{F}}$ の $\mathbb{F}$ 基底.

証明. 命題 1.2.7 より $\{m_\lambda \mid \lambda \in \mathcal{P}_n\}$ は $\Lambda_{n,\mathbb{F}}$ の $\mathbb{F}$ 基底. これと三角性 (定理 1.3.3 条件 (i)) から従う. □

注意 1.3.8. 三角性という用語は, ドミナンス順序で並べた時の $\{m_\lambda \mid \lambda \in \mathcal{P}_n\}$ から $\{P_\lambda \mid \lambda \in \mathcal{P}_n\}$ への基底変換行列が三角行列になっていることに因んでいる.

変数の数 n が 3 以下の場合に, 定理 1.3.3 の 2 条件を使って具体的に Macdonald 多項式を求めてみよう.

例 1.3.9. $n = 1$ の場合. 対応する分割の集合は $\mathcal{P}_1 = \mathbb{N}$ であり, 対称多項式の空間は

$$\Lambda_{1,\mathbb{F}} = \mathbb{F}[x_1] = \textstyle\bigoplus_{l \in \mathbb{N}} \mathbb{F} m_l(x), \quad m_l(x) = x_1^l.$$

よって条件 (i) から $P_l = \sum_{m=0}^{l} c_{l,m} x_1^m$, $c_{l,m} \in \mathbb{F}$, $c_{l,l} = 1$ と書ける. q 差分作用素は $D_x = T_{q,x_1}$ なので

$$D_x P_l = \textstyle\sum_{m=0}^{l} c_{l,m} q^m x_1^m.$$

これが P_l と比例するためには, q が不定元であることに注意すると, $c_{l,m} = 0$ $(m < l)$ が必要十分. よって P_l 及びその固有値は

$$P_l = P_l(x_1; q, t) = x_1^l, \quad D_l P_l = q^l P_l \quad (l \in \mathbb{N}).$$

例 1.3.10. $n = 2$ の場合. $\mathcal{P}_2 = \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{N}^2 \mid \lambda_1 \geq \lambda_2\}$ であり, 対称多項式の空間は $\Lambda_{2,\mathbb{F}} = \mathbb{F}[x_1, x_2]^{\mathfrak{S}_2} = \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{P}_2} \mathbb{F} m_\lambda(x)$. 単項対称式は

$$m_\lambda(x) = \begin{cases} x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} + x_1^{\lambda_2} x_2^{\lambda_1} = (x_1 x_2)^{\lambda_2}(x_1^{\lambda_1 - \lambda_2} + x_2^{\lambda_1 - \lambda_2}) & (\lambda_1 > \lambda_2) \\ (x_1 x_2)^{\lambda_1} & (\lambda_1 = \lambda_2) \end{cases}.$$

また q 差分作用素は

$$D_x = \frac{t x_1 - x_2}{x_1 - x_2} T_{q,x_1} + \frac{t x_2 - x_1}{x_2 - x_1} T_{q,x_2}.$$

$D_x m_\lambda$ を調べると,

$$\begin{aligned}(x_1 - x_2) D_x m_\lambda &= (t x_1 - x_2)(q^{\lambda_1} x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} + q^{\lambda_2} x_1^{\lambda_2} x_2^{\lambda_1}) - (t x_2 - x_1)(q^{\lambda_2} x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} + q^{\lambda_1} x_1^{\lambda_2} x_2^{\lambda_1}) \\ &= (q^{\lambda_1} t + q^{\lambda_2})(x_1^{\lambda_1 + 1} x_2^{\lambda_2} - x_1^{\lambda_2} x_2^{\lambda_1 + 1}) - (q^{\lambda_1} + q^{\lambda_2} t)(x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2 + 1} - x_1^{\lambda_2 + 1} x_2^{\lambda_1})\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}D_x m_\lambda &= (q^{\lambda_1} t + q^{\lambda_2})(x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} + x^{\lambda_1 - 1} x_2^{\lambda_2 + 1} + \cdots + x_1^{\lambda_2} x_2^{\lambda_1}) \\ &\quad - (q^{\lambda_1} + q^{\lambda_2} t)(x_1^{\lambda_1 - 1} x_2^{\lambda_2 + 1} + x_1^{\lambda_1 - 2} x_2^{\lambda_2 + 2} + \cdots + x_1^{\lambda_2 + 1} x_2^{\lambda_1 - 1}) \\ &\quad = (q^{\lambda_1} t + q^{\lambda_2}) m_\lambda + (q^{\lambda_1} - q^{\lambda_2})(t - 1) \textstyle\sum_{\mu < \lambda} m_\mu. \end{aligned} \tag{1.3.3}$$

λ が小さい範囲で P_λ を求めてみよう．まず $\lambda=(1,0)$ なら, (1.3.3) と三角性から

$$P_{(1,0)}(x)=m_{(1,0)}(x)=x_1+x_2,\quad D_xP_{(1,0)}(x)=(qt+1)P_{(1,0)}(x).$$

次に $\lambda=(2,0)$ なら $P_{(2,0)}=m_{(2,0)}+cm_{(1,1)}$ と置けて, 固有方程式 $D_xP_{(2,0)}\propto P_{(2,0)}$ と (1.3.3) から

$$m_{(2,0)}+cm_{(1,1)}\propto(q^2t+1)m_{(2,0)}+(q^2-1)(t-1)m_{(1,1)}+c(qt+1)m_{(1,1)}.$$
$$\therefore\ c=\tfrac{(q^2-1)(t-1)}{q^2t+1-q(t+1)}=\tfrac{(q^2-1)(t-1)}{(qt-1)(q-1)}=\tfrac{(1-q^2)(1-t)}{(1-q)(1-qt)}.$$
$$\therefore\ P_{(2,0)}=m_{(2,0)}+\tfrac{(1-q^2)(1-t)}{(1-q)(1-qt)}m_{(1,1)},\quad D_xP_{(2,0)}(x)=(q^2t+1)P_{(2,0)}(x).$$

$\lambda=(1,1)$ なら例 1.3.6 と (1.3.3) より $P_{(1,1)}=m_{(1,1)}$, $D_xP_{(1,1)}=(qt+q)P_{(1,1)}$.
$\lambda=(3,0)$ の場合, $P_{(3,0)}=m_{(3,0)}+cm_{(2,1)}$ と置けて, 固有方程式と (1.3.3) から

$$m_{(3,0)}+cm_{(2,1)}\propto(q^3t+1)m_{(3,0)}+(q^3-1)(t-1)m_{2,1}+c(q^2t+q)m_{(2,1)}.$$
$$\therefore\ c=\tfrac{(q^3-1)(t-1)}{(q^3t+1)-(q^2t+q)}=\tfrac{(1-q^3)(1-t)}{(1-q)(1-q^2t)}.$$
$$\therefore\ P_{(3,0)}=m_{(3,0)}+\tfrac{(1-q^3)(1-t)}{(1-q)(1-q^2t)}m_{(2,1)},\quad D_xP_{(3,0)}(x)=(q^3t+1)P_{(3,0)}(x).$$

$\lambda=(2,1)$ の場合, 三角性から $P_{(2,1)}=m_{(2,1)}$, $D_xP_{(2,1)}(x)=(q^2t+q)P_{(2,1)}(x)$.

実は, $n=2$ の場合は P_λ の明示式が知られている．その説明の為に q シフト積の記号 $(z;q)_m$ を導入しよう:

$$(z;q)_m:=(1-z)(1-zq)(1-zq^2)\cdots(1-zq^{m-1})\quad(m\in\mathbb{N}).\tag{1.3.4}$$

命題 1.3.11. 任意の $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathcal{P}_2$ について, $l:=\lambda_1-\lambda_2\in\mathbb{N}$ と置くと

$$P_{(\lambda_1,\lambda_2)}(x_1,x_2)=(x_1x_2)^{\lambda_2}\cdot\frac{(q;q)_l}{(t;q)_l}\sum_{i+j=l}\frac{(t;q)_i}{(q;q)_i}\frac{(t;q)_j}{(q;q)_j}x_1^ix_2^j,\quad D_xP_\lambda(x)=(q^{\lambda_1}t+q^{\lambda_2})P_\lambda(x).$$

特に

$$P_{(\lambda_1,\lambda_2)}(x_1,x_2)=(x_1x_2)^{\lambda_2}P_{(\lambda_1-\lambda_2,0)}(x_1,x_2).$$

証明. 主張第 2 式は (1.3.3) と $P_\lambda=m_\lambda+\cdots$ から直ちに従う．主張第 1 式の右辺を

$$f_\lambda:=\sum_{i=0}^{\lfloor l/2\rfloor}f_im_{(\lambda_1-i,\lambda_2+i)},\quad f_i:=\frac{(t;q)_i}{(q;q)_i}\frac{(t;q)_{l-i}}{(q;q)_{l-i}}\Big/\frac{(t;q)_l}{(q;q)_l}\tag{1.3.5}$$

と置く．計算 (1.3.3) から, $e(r,s):=q^rt+q^s$, $c(r,s):=(q^r-q^s)(t-1)$ と置くと $D_xm_{(r,s)}=e(r,s)m_{(r,s)}+c(r,s)\sum_{k=1}^{\lfloor(r-s)/2\rfloor}m_{(r-k,s+k)}$ となるので, $D_xf_\lambda=\sum_{i=0}^{\lfloor l/2\rfloor}m_{(\lambda_1-i,\lambda_2+i)}\big(\sum_{k=0}^{i-1}c(\lambda_1-k,\lambda_2+k)f_k+e(\lambda_1-i,\lambda_2+i)f_i\big)$. 従って

$$\sum_{k=0}^{i-1}c(\lambda_1-k,\lambda_2+k)f_k/f_i+e(\lambda_1-i,\lambda_2+i)=e(\lambda_1,\lambda_2)\quad(i=0,1,\dots,\lfloor l/2\rfloor)\tag{1.3.6}$$

を示せば, f_λ が D_1 の固有函数であることが分かる．(1.3.5) より $f_\lambda\in m_\lambda+\sum_{\mu<\lambda}\mathbb{F}m_\mu$ だから, 定理 1.3.3 の一意性より $P_\lambda=f_\lambda$ が従う．(1.3.6) を i に関する帰納法で示そう．$i=0$ の場合は自明で, $i=1$ の場合は

$$c(\lambda_1,\lambda_2)\tfrac{f_0}{f_1}=(q^{\lambda_1}-q^{\lambda_2})(t-1)\tfrac{1-q}{1-t}\tfrac{1-q^{l-1}t}{1-q^l}=q^{\lambda_2}(1-q)(1-q^{l-1}t)=e(\lambda_1,\lambda_2)-e(\lambda_1-1,\lambda_2+1)$$

と確かめられる. i まで正しいとして, $i+1$ の場合に

$$\sum_{k=0}^{i} c(\lambda_1-k,\lambda_2+k)\tfrac{f_k}{f_{i+1}} = \sum_{k=0}^{i-1} c(\lambda_1-k,\lambda_2+k)\tfrac{f_k}{f_i}\tfrac{f_i}{f_{i+1}} + c(\lambda_1-i,\lambda_2+i)\tfrac{f_i}{f_{i+1}}$$

和 $\sum_{k=0}^{i-1}$ に帰納法の仮定を使って

$$\begin{aligned} &= \bigl(e(\lambda_1,\lambda_2)-e(\lambda_1-i,\lambda_2+i)+c(\lambda_1-i,\lambda_2+i)\bigr)\tfrac{f_i}{f_{i+1}} \\ &= \bigl(q^{\lambda_2}(1-q^{l-i}t)(1-q^i)+q^{\lambda_2}(q^{l-i}-q^i)(t-1)\bigr)\tfrac{1-tq^{l-i-1}}{1-q^{l-i}}\tfrac{1-q^{i+1}}{1-tq^i} \\ &= q^{\lambda_2}(1-q^{i+1})(1-q^{l-i-1}t) = e(\lambda_1,\lambda_2)-e(\lambda_1-i-1,\lambda_2+i+1) \end{aligned}$$

と確かめられる. □

注意 1.3.12. 命題 1.3.11 より, 2 変数の Macdonald 多項式 $P_\lambda(x) = P_{(\lambda_1,\lambda_2)}(x_1,x_2)$ は

$$P_\lambda(x) = (x_1x_2)^{\lambda_2+l/2}F_l(\sqrt{x/y}), \quad F_l(z) := \frac{(q;q)_l}{(t;q)_l}\sum_{i+j=l}\frac{(t;q)_i}{(q;q)_i}\frac{(t;q)_j}{(q;q)_j}z^{i-j}$$

と書ける. Laurent 多項式 $F_l(z)$ は q 超球多項式 (q-ultraspherical polynomial) または Rogers 多項式と呼ばれていて, q 超幾何直交多項式の例である. Rogers 多項式については [三 04, §4.7] や [KLS10, §14.10.1] を, q 超幾何直交多項式の理論については [KLS10, Part II] や [GR04, Chap. 7] を参照せよ. また, Rogers 多項式の母函数を使った命題 1.3.11 の導出は [M03, §6.3] を, 本稿よりスマートな導出は [N23, §4.3] 参照せよ.

例 1.3.13. $n=3$ 変数の場合も固有函数を求めると以下のようになる.

$$\begin{gathered} P_{(1)} = m_{(1)}, \quad P_{(2)} = m_{(2)} + \tfrac{(1-q^2)(1-t)}{(1-q)(1-qt)}m_{(1,1)}, \quad P_{(1,1)} = m_{(1,1)}, \\ P_{(3)} = m_{(3)} + \tfrac{(1-q^3)(1-t)}{(1-q^2t)(1-q)}m_{(2,1)} + \tfrac{(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)}{(1-q)^2(1-q^t)(1-q^2t)}m_{(1^3)}, \\ P_{(2,1)} = m_{(2,1)} + \tfrac{(1-t)(2+q+t+2qt)}{1-qt^2}m_{(1^3)}, \quad P_{(1^3)} = m_{(1^3)}. \end{gathered}$$

$|\lambda| := \sum_{i=1}^{3}\lambda_i \le 2$ なら 2 変数の場合 (例 1.3.10, 命題 1.3.11) と同じである. また, 2 変数の場合の Macdonald 多項式の係数は因数分解したが, $P_{(2,1)}$ の展開から分かるように, 3 変数以上では分解するとは限らない.

1.4 Macdonald 対称多項式の一意存在

定理 1.3.3 の証明をする前に, q 差分作用素

$$D_x := \sum_{i=1}^{n} A_i(x)T_{q,x_i}, \quad A_i(x) := \prod_{j\ne i}\frac{tx_i-x_j}{x_i-x_j} \tag{1.4.1}$$

の基本性質を把握して置こう. 以下, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ の x 変数への作用 (1.1.4) を, 下点を略して $\sigma x_i = x_{\sigma(i)}$ と表す. それが誘導する $\mathbb{F}(x)$ 上の線形作用素も $\sigma\colon \mathbb{F}(x) \to \mathbb{F}(x)$, $f \mapsto \sigma(f)$ と書く. (1.3.1) のシフト作用素 T_{p,x_i} との合成が $\sigma T_{p,x_i} = T_{p,x_{\sigma(i)}}\sigma$ となることに注意する.

命題 1.4.1. q 差分作用素 D_x は以下の性質を満たす.

(1) D_x は $\mathfrak{S}_n$ 不変. つまり, 任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ と $f(x) \in \mathbb{F}(x)$ に対して $(\sigma D_x)(f) = (D_x\sigma)(f)$.

(2) 差積

$$\Delta(x) \coloneqq \det(x_i^{n-j})_{i,j=1}^n = \prod_{1\le i<j\le n}(x_i - x_j) \tag{1.4.2}$$

と任意の多項式 $f(x) \in K[x]$ に対して

$$(D_x f)(x) = \frac{1}{\Delta(x)}\sum_{k=1}^n (T_{t,x_k}\Delta)(x)\cdot(T_{q,x_k}f)(x).$$

(3) D_x は対称多項式の空間 $\Lambda_{n,\mathbb{F}} = \mathbb{F}[x]^{\mathfrak{S}_n}$ を保つ．つまり $D_x(\Lambda_{n,\mathbb{F}}) \subset \Lambda_{n,\mathbb{F}}$.

証明.　(1) (1.4.1) から, x_i の添え字 $i \in \{1,\dots,n\}$ の並べ方に D_x は依存しない.

(2) (1.4.1) において $A_i = (T_{t,x_k}\Delta)/\Delta$ なので.

(3) (1) より任意の $f \in \Lambda_{n,\mathbb{F}}$ に対して $D_x f \in \mathbb{F}(x)^{\mathfrak{S}_n}$．また (2) より $\Delta D_x f \in \mathbb{F}[x]$. $D_x f$ が対称的かつ Δ が交代的だから, $\Delta D_x f$ は交代的な多項式であり, 従って差積 Δ で割れる．交代式同士の商は対称的だから, $D_x f \in \mathbb{F}[x]^{\mathfrak{S}_n}$.

□

次に D_x の単項対称式 m_λ への作用を調べよう．$n=2$ 変数の場合は例 1.3.10 の (1.3.3) で調べた.

補題 1.4.2 ([野 95, Lemma 4.1])**.** 任意の $\lambda \in \mathcal{P}_n$ に対して

$$D_x m_\lambda(x) = \textstyle\sum_{\mu\le\lambda} d_{\lambda\mu} m_\mu(x), \quad d_{\lambda\mu} \in \mathbb{F},\ d_{\lambda\lambda} = \sum_{i=1}^n q^{\lambda_i} t^{n-i}.$$

証明. ドミナンス順序に関して $\nu \le \mu$ であることは, 適当な $k_1,\dots,k_{n-1} \in \mathbb{N}$ が存在して

$$x^\nu = x^\mu (x_2/x_1)^{k_1}\cdots(x_n/x_{n-1})^{k_{n-1}}$$

となることと同値．そこで, “領域 $|x_1| \gg |x_2| \gg \cdots \gg |x_n|$ における漸近展開” を考えて, D_x における T_{q,x_i} の係数 A_i を $x_2/x_1,\dots,x_n/x_{n-1}$ に関する冪級数に展開すると

$$\begin{aligned}
A_i = \prod_{j\ne i}\frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j} &= \prod_{1\le j<i}\frac{1-tx_i/x_j}{1-x_i/x_j}\prod_{i<j\le n} t\frac{1-x_j/tx_i}{1-x_j/x_i} = \prod_{1\le j<i}\frac{1-tx_{ij}}{1-x_{ij}}\prod_{i<j\le n} t\frac{1-x_{ji}/t}{1-x_{ji}} \\
&= \prod_{1\le j<i}(1-tx_{ij})(1+x_{ij}+x_{ij}^2+\cdots)\prod_{i<j\le n} t(1-x_{ji}/t)(1+x_{ji}+x_{ji}^2+\cdots) \\
&\in t^{n-i} + \mathbb{Z}[t][\![x_{i1},\dots,x_{i\,i-1},x_{i+1\,i},\dots,x_{ni}]\!].
\end{aligned}$$

但し途中から $x_{ij} \coloneqq x_i/x_j$ 等と略記した．これから任意の $\alpha \in \mathbb{N}^n$ に対して

$$\begin{aligned}
D_x x^\alpha = \textstyle\sum_{i=1}^n A_i q^{\alpha_i} x^\alpha &= x^\alpha \textstyle\sum_{i=1}^n \big(q^{\alpha_i}t^{n-i} + (x_i/x_1,\dots,x_n/x_i \text{ の級数})\big) \\
&\in d_\alpha x^\alpha + x^\alpha \mathbb{F}[\![x_2/x_1,\dots,x_n/x_{n-1}]\!], \quad d_\alpha \coloneqq \textstyle\sum_{i=1}^n q^{\alpha_i}t^{n-i}.
\end{aligned}$$

よって m_λ への作用は

$$D_x m_\lambda = \textstyle\sum_{\alpha\in\mathfrak{S}_n.\lambda} D_x x^\alpha = \sum_{\alpha\in\mathfrak{S}_n.\lambda}\big(d_\alpha x^\alpha + (\text{低次項})\big) = d_\lambda x^\lambda + (\text{低次項}) \in d_\lambda m_\lambda + \sum_{\mu<\lambda}\mathbb{F}m_\mu.$$

最終行は命題 1.4.1 (3) の帰結 $D_x m_\lambda(x) \in \Lambda_{n,\mathbb{F}}$ から従う．$d_\lambda = d_{\lambda\lambda}$ より主張が従う． □

注意 1.4.3. この証明は [野 95, Lemma 4.1] のコピーである. 漸近展開に注目する技法は, van Diejen による Koornwinder 多項式の存在証明 [vD95, §3.1] に遡る.

さて, 定理 1.3.3 は次の命題と補題 1.4.2 の帰結である.

命題 1.4.4. $\Lambda_{n,\mathbb{F}}$ 上の線形作用素 Φ が

$$\begin{aligned} &\forall\lambda \in \mathcal{P}_n, \quad \Phi\, m_\lambda = d_{\lambda\lambda} m_\lambda + \textstyle\sum_{\mu<\lambda} d_{\lambda\mu} m_\mu,\ d_{\lambda\lambda} \in \mathbb{F}\setminus\{0\}, \\ &\forall\,\mu < \lambda, \quad d_{\mu\mu} \neq d_{\lambda\lambda} \end{aligned} \tag{1.4.3}$$

を満たす時, 各 $\lambda \in \mathcal{P}_n$ に対して, 次の条件を満たす $P_\lambda \in \Lambda_{n,\mathbb{F}}$ が一意に存在する.

(i) $P_\lambda \in m_\lambda + \sum_{\mu<\lambda} \mathbb{F} m_\mu$.

(ii) $\Phi P_\lambda = d_{\lambda\lambda} P_\lambda$.

証明. $P_\lambda = \sum_{\mu\le\lambda} c_{\lambda\mu} m_\mu$, $c_{\lambda\lambda} = 1$ が D_x の固有函数である為の必要十分条件を求めよう.

$$D_x P_\lambda = \textstyle\sum_{\nu\le\lambda} c_{\lambda\nu} D_x m_\nu = \sum_{\mu\le\lambda} \big(\sum_{\mu\le\nu\le\lambda} c_{\lambda\nu} d_{\nu\mu}\big) m_\mu$$

より, 固有値 $\varepsilon \in \mathbb{F}$ の固有函数である為には $\varepsilon c_{\lambda\mu} = \sum_{\mu\le\nu\le\lambda} c_{\lambda\nu} d_{\nu\mu}$, つまり

$$(\varepsilon - d_{\mu\mu}) c_{\lambda\mu} = \textstyle\sum_{\mu<\nu\le\lambda} c_{\lambda\nu} d_{\nu\mu} \tag{1.4.4}$$

が任意の $\mu \le \lambda$ に対して成立することが必要十分. まず $\mu = \lambda$ の時に, $c_{\lambda\lambda} \neq 0$ からとして $\varepsilon = d_{\lambda\lambda}$ を得る. すると $\mu < \lambda$ の時に, $\varepsilon - d_{\mu\mu} = d_{\lambda\lambda} - d_{\mu\mu} \neq 0$ だから, (1.4.4) は

$$c_{\lambda\mu} = (d_{\lambda\lambda} - d_{\mu\mu})^{-1} \textstyle\sum_{\mu<\nu\le\lambda} c_{\lambda\nu} d_{\nu\mu}$$

となる. これから, ドミナンス順序 $\le$ に関する下降帰納法によって, 係数 $c_{\lambda\mu}$ が一意に定まる. □

後で参照するために, (1.4.4) 後半の固有値の非縮退条件を, パラメータ q, t に関する条件として書き直しておこう.

$$\lambda, \mu \in \mathcal{P}_n, \quad \lambda \neq \mu \Longrightarrow d_\lambda \neq d_\mu, \quad d_\lambda := \textstyle\sum_{i=1}^n q^{\lambda_i} t^{n-i}. \tag{1.4.5}$$

この条件の下であれば, パラメータ q, t が複素数であっても命題 1.4.4 が適用できて, Macdonald 対称多項式 $P_\lambda(x; q, t) \in \Lambda_{n,\mathbb{C}} = \mathbb{C}[x]^{\mathfrak{S}_n}$ が一意に定まることに注意する.

1.5　レポート問題

問題 1.1 (おすすめ問題). $n = 2$ 変数の場合の明示式 (命題 1.3.11) を用いて, 以下のパラメータ特殊化・退化極限を調べよ.

(1) $P_{(\lambda_1,\lambda_2)}(x_1, x_2; q, t = q)$.

(2) $P_{(\lambda_1,\lambda_2)}(x_1, x_2; q, t = 1)$.

(3) $P_{(\lambda_1,\lambda_2)}(x_1, x_2; q = 0, t)$.

(4) $\lim_{\hbar\to 0} P_{(\lambda_1,\lambda_2)}(x_1, x_2; q = e^\hbar, e^{\beta\hbar})$.

1.5.1　$t=1$ 特殊化

$n=2$ 変数の Macdonald 対称多項式の明示式 (命題 1.3.11) で $t=1$ とすると, $(t;q)_i=(1;q)_i=\delta_{i,0}$ から $P_\lambda(x_1,x_2;q,1)=(x_1x_2)^{\lambda_2}(x_1^{\lambda_1-\lambda_2}+x_2^{\lambda_1-\lambda_2})=m_\lambda(x_1,x_2)$ が分かる. また, $n=3$ 変数の場合の例 1.3.13 で $t=1$ としてみると, どの場合も $P_\lambda(x_1,x_2,x_3;q,1)=m_\lambda(x_1,x_2,x_3)$ となっている. 実は:

問題 1.2. $t=1$ の Macdonald 対称多項式は単項対称式であること, つまり

$$P_\lambda(x;q,1)=m_\lambda(x)$$

が任意の正整数 n と $\lambda\in\mathcal{P}_n$ に対して成立することを, 以下の段階を踏んで示せ.

(1) q 差分作用素は $D_x=\sum_{i=1}^n T_{q,x_i}$ で, P_λ の固有値は $d_\lambda=\sum_{i=1}^n q^{\lambda_i}$ である. $\lambda\neq\mu$ なら $d_\lambda\neq d_\mu$ であることを示せ.

(2) $D_x m_\lambda(x)=d_\lambda m_\lambda(x)$ を示せ.

(1) より $t=1$ の時でも命題 1.4.4 が適用できて, Macdonald 対称多項式 $P_\lambda(x;q,1)$ の一意存在が言える. (2) よりそれは $m_\lambda(x)$ と一致する.

1.5.2　$t=q$ 特殊化

次に $t=q$ とすると, $n=2$ 変数の場合は $P_\lambda(x_1,x_2;q,q)=(x_1x_2)^{\lambda_2}\sum_{i+j=\lambda_1-\lambda_2}x_1^ix_2^j$. $n=3$ 変数の例 1.3.13 でも, $P_\lambda(x_1,x_2,x_3;q,q)$ は x の単項式の係数 1 の和になっている. 実は:

問題 1.3. $t=q$ の Macdonald 対称多項式は Schur 多項式であること,

$$P_\lambda(x;q,q)=s_\lambda(x),\quad s_\alpha:=\frac{\Delta_{\alpha+\delta}(x)}{\Delta_\delta(x)},\quad \Delta_{\alpha+\delta}(x):=\det(x_i^{\alpha_j+n-j})_{i,j=1}^n\quad(\alpha\in\mathbb{N}^n)$$

が任意の正整数 n と $\lambda\in\mathcal{P}_n$ に対して成立することを, 以下の段階を踏んで示せ.

(1) (1.4.2) の差積 $\Delta(x)=\Delta_\delta(x)$ を用いると, 命題 1.4.1 (2) から q 差分作用素は

$$D_x=\Delta(x)^{-1}{\textstyle\sum_{i=1}^n}T_{q,x_i}\big(\Delta(x)\big)T_{q,x_i}=\Delta(x)^{-1}({\textstyle\sum_{i=1}^n}T_{q,x_i})\Delta(x)$$

と書ける. 但し最右辺は, $\Delta(x)^{-1}$ による掛算作用素, 作用素 $\sum_{i=1}^n T_{q,x_i}$, そして $\Delta(x)$ による掛算作用素の合成を表している. また P_λ の固有値は $d_\lambda=\sum_{i=1}^n q^{\lambda_i+n-i}$ である. $\lambda\neq\mu$ なら $d_\lambda\neq d_\mu$ であることを示せ.

(2) 任意の $\lambda\in\mathcal{P}_n$ と $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ に対して $\sum_{i=1}^n T_{q,x_i}(x^{\sigma.(\lambda+\delta)})=d_\lambda x^{\sigma.(\lambda+\delta)}$ を示せ.

(3) (2) から $D_x s_\lambda(x)=d_\lambda s_\lambda(x)$ を示せ.

後の議論は問題 1.2 と同様である.

問題 1.4 ([白 03, 補題 3.23])**.** $\alpha\in\mathbb{N}^n$ に対し, 補題 1.2.1 の類別から $\alpha\in\mathfrak{S}_n.\lambda$ となる分割 $\lambda\in\mathcal{P}_n$ が一意に定まる. この時, Schur 多項式 $s_\alpha(x)=\Delta_{\alpha+\delta}(x)/\Delta_\delta(x)$ は次のうちのどれかに等しいことを示せ.

(i) $s_\alpha(x)=s_\lambda(x)$.

(ii) $s_\alpha(x)=0$.

(iii) $\mu\in\mathcal{P}_n$, $\mu<\lambda$ が存在して $s_\alpha(x)=\pm s_\mu(x)$.

2　Macdonald 対称多項式の基本性質

引き続き, 係数体 $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(q,t)$ とその上の有理函数体 $\mathbb{F}(x) = \mathbb{F}(x_1,\ldots,x_n)$ を考える．また差積 $\Delta(x) = \prod_{1\le i<j\le n}(x_i - x_j)$ も用いる．

2.1　高階 Macdonald-Ruijsenaars q 差分作用素

注意 1.3.2 で言及したように, q 差分作用素 D_x は可換作用素族 $\{D_x^{(r)} \mid r = 1,\ldots,n\}$ に属する．実は, Macdonald 対称多項式 $P_\lambda(x)$ はこの作用素族の同時固有函数である．

$[n] := \{1,\ldots,n\}$ と略記し, 部分集合 $I = \{i_1,\ldots,i_r\} \subset [n]$ と $p \in \mathbb{F}\setminus\{0\}$ に対して p シフト作用素 $T^I_{p,x}$ を次式で定義する．

$$T^I_{p,x} := T_{p,x_{i_1}} \cdots T_{p,x_{i_r}}.$$

定義 2.1.1. $\mathbb{F}(x)$ 上の作用素族 $D_x^{(r)}$ $(r = 0,1,\ldots,n)$ を

$$D_x^{(r)} := \sum_{I\subset[n],\,|I|=r} A_I(x)T^I_{q,x}, \quad A_I(x) := t^{\binom{|I|}{2}} \prod_{i\in I,\,j\notin I} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j} = \Delta(x)^{-1}T^I_{t,x}(\Delta(x))$$

で定義する．特に $D_x^{(0)} = 1 = \mathrm{id}$, $D_x^{(1)} = D_x$, $D_x^{(n)} = t^{\binom{n}{2}}T_{q,x_1}\cdots T_{q,x_n}$ である．$D_x^{(r)}$ を r 階の Macdonald-Ruijsenaars q 差分作用素と呼ぶ．

$D_x^{(r)}$ 達は D_x の場合 (命題 1.4.1, 補題 1.4.2) と同様の性質を満たす:

命題 2.1.2. q 差分作用素 $D_x^{(r)}$ $(r = 1,\ldots,n)$ は以下の性質を満たす．

(1) $D_x^{(r)}$ は対称多項式の空間 $\Lambda_{n,\mathbb{F}} = \mathbb{F}[x]^{\mathfrak{S}_n}$ を保つ．

(2) 任意の $\lambda \in \mathcal{P}_n$ と $r = 1,\ldots,n$ に対して

$$D_x^{(r)}m_\lambda(x) = \textstyle\sum_{\mu\le\lambda} d^{(r)}_{\lambda\mu}m_\mu(x), \quad d^{(r)}_{\lambda\mu} \in \mathbb{F}, \quad d^{(r)}_{\lambda\lambda} = e_r(q^\lambda t^\delta),$$

但し $e_r(q^\lambda t^\delta)$ は基本対称式 (1.1.6) で変数を次式にしたもの．

$$q^\lambda t^\delta := (q^{\lambda_1}t^{n-1}, q^{\lambda_2}t^{n-2},\ldots,q^{\lambda_n})$$

これらの主張は 1 階の議論と同様の方針でも証明できるが, 本稿では [M95, Chapter VI, §3] の議論を紹介する．まず, $D_x^{(r)}$ 達の母函数が次のように表示できる (問題 2.1) ことに注意する．

$$D_x(u) := \sum_{r=0}^{n} u^r D_x^{(r)} = \frac{1}{\Delta(x)} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma)x^{\sigma.\delta} \prod_{i=1}^{n}(1 + ut^{(\sigma.\delta)_i}T_{q,x_i}). \tag{2.1.1}$$

但し $\mathrm{sgn}(\sigma) := (-1)^{\ell(\sigma)}$ は置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ の符号 (定義 4.1.6) であり, また $\delta := (n-1,n-2,\ldots,0) \in \mathbb{N}^n$ である．

命題 2.1.2 の証明. 各 $\nu \in \mathbb{N}^n$ に対して, $T_{q,x_i}x^\nu = q^{\nu_i}x^\nu$ より[*3]

$$D_x(u)x^\nu = \frac{1}{\Delta(x)} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\big(\textstyle\prod_{i=1}^n(1 + ut^{(\sigma.\delta)_i}q^{\nu_i})\big)x^{\sigma.\delta+\nu}.$$

[*3] 私の手元にある [M95] の p.316, $(3.5)_r$ の次の数式環境には誤植があって, 右辺の $\Delta(x)^{-1}$ ([M95] の記号だと $a_\delta(x)^{-1}$) が抜けています．

補題 1.2.1 の類別を思い出して, $\nu = \tau.\lambda$ $(\tau \in \mathfrak{S}_n,\ \lambda \in \mathcal{P}_n)$ と表し, τ に関して和を取ると

$$\left|\mathfrak{S}_n^\lambda\right| D_x(u) m_\lambda(x) = \frac{1}{\Delta(x)} \sum_{\sigma,\tau \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \bigl(\textstyle\prod_{i=1}^n (1 + u t^{(\sigma.\delta)_i} q^{(\tau.\lambda)_i})\bigr) x^{\sigma.\delta + \tau.\lambda}$$

但し $\mathfrak{S}_n^\lambda \subset \mathfrak{S}_n$ は λ の固定部分群. 更に右辺の和において $\tau = \sigma w$ と置くと

$$= \frac{1}{\Delta(x)} \sum_{\sigma,w \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \bigl(\textstyle\prod_{i=1}^n (1 + u t^{(\sigma.\delta)_i} q^{(\sigma w.\lambda)_i})\bigr) x^{\sigma.(w.\lambda + \delta)}$$

積 $\prod_{i=1}^n$ が σ によらないことに注意して

$$= \frac{1}{\Delta(x)} \sum_{\sigma,w \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \bigl(\textstyle\prod_{i=1}^n (1 + u t^{\delta_i} q^{(w.\lambda)_i})\bigr) x^{\sigma.(w.\lambda + \delta)}$$

問題 1.3 の Schur 多項式 $s_\mu(x) = \Delta_{\mu+\delta}(x)/\Delta(x) = \Delta(x)^{-1} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) x^{\sigma.(\mu+\delta)}$ を思い出して

$$= \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} \bigl(\textstyle\prod_{i=1}^n (1 + u t^{n-i} q^{(w.\lambda)_i})\bigr) s_{w.\lambda}(x).$$

軌道と剰余類との全単射 $\mathfrak{S}_n.\lambda \cong \mathfrak{S}_n/\mathfrak{S}_n^\lambda$ を使って

$$D_x(u) m_\lambda(x) = \sum_{\alpha \in \mathfrak{S}_n.\lambda} \Bigl(\prod_{i=1}^n (1 + u q^{\alpha_i} t^{n-i})\Bigr) s_\alpha(x). \tag{2.1.2}$$

これから主張 (1) が従う.

また問題 1.4 から, (2.1.2) 右辺の和に現れる Schur 多項式 $s_\alpha(x) = \Delta_{\alpha+\delta}(x)/\Delta(x)$ は, $\alpha = \lambda$ なら $s_\lambda(x)$ で, $\alpha \neq \lambda$ なら 0 か $\pm s_\mu$ $(\mu \in \mathcal{P}_n,\ \mu < \lambda)$. すると

$$D_x(u) m_\lambda(x) = \sum_{\mu \le \lambda} a_{\lambda\mu}(u) m_\mu(x), \quad a_{\lambda\mu}(u) \in \mathbb{Z}[u,q,t] \tag{2.1.3}$$

と展開できることが分かる. 実際, 分割 $\nu \in \mathcal{P}_n$ の Schur 多項式 $s_\nu(x)$ は Macdonald 対称多項式の $t = q$ 特殊化であり (問題 1.3), かつ $\mathbb{Z}$ 係数対称多項式だから, 三角性 $s_\nu(x) \in \sum_{\kappa \le \nu} \mathbb{Z} m_\kappa(x)$ を満たす. このことと (2.1.2) から展開 (2.1.3) を得る. 特に係数 $a_{\lambda\lambda}(u)$ は

$$a_{\lambda\lambda}(u) = \prod_{i=1}^n (1 + u q^{\lambda_i} t^{n-i})$$

となり, u^r の係数を取ると

$$D_x^{(r)} m_\lambda(x) \in e_r(q^\lambda t^\delta) m_\lambda(x) + \sum_{\mu < \lambda} \mathbb{Z}[q,t] m_\mu(x).$$

□

2.2　同時固有函数としての Macdonald 対称多項式

定理 2.2.1. q 差分作用素 $D_x^{(r)}$ $(r = 1, \ldots, n)$ は互いに可換である.

$$D_x^{(r)} D_x^{(s)} = D_x^{(s)} D_x^{(r)} \quad (r, s = 1, \ldots, n).$$

定理 2.2.2. 任意の $\lambda \in \mathcal{P}_n$ に対し，Macdonald 対称多項式 $P_\lambda(x)$ は作用素族 $\{D_x^{(r)} \mid r = 1, \dots, n\}$ の同時固有函数である．

$$D_x^{(r)} P_\lambda(x) = d_\lambda^{(r)} P_\lambda(x), \quad d_\lambda^{(r)} = e_r(q^\lambda t^\delta) \quad (r = 1, \dots, n).$$

本稿では定理 2.2.1 を一度認めて定理 2.2.2 を導出しよう．

定理 2.2.1 ⇒ 定理 2.2.2 の証明．可換性 $D_x D_x^{(r)} = D_x^{(r)} D_x$ と $D_x P_\lambda(x) = d_\lambda P_\lambda(x)$ から

$$D_x D_x^{(r)} P_\lambda(x) = D_x^{(r)} D_x P_\lambda(x) = d_\lambda D_x^{(r)} P_\lambda(x).$$

つまり $D_x^{(r)} P_\lambda(x)$ は D_x の固有函数で固有値 d_λ．ところで $\{P_\lambda(x) \mid \lambda \in \mathcal{P}_n\}$ が対称多項式の空間 $\Lambda_{n,\mathbb{F}} = \mathbb{F}[x]^{\mathfrak{S}_n}$ の基底であること (系 1.3.7) から，$\Lambda_{n,\mathbb{F}}$ の作用素 D_x に関するスペクトル分解は

$$\Lambda_{n,\mathbb{F}} = \textstyle\bigoplus_{s \in S} H_s, \quad H_s := \{p(x) \in \Lambda_{n,\mathbb{F}} \mid D_x p(x) = s p(x)\}, \quad S := \{d_\lambda \mid \lambda \in \mathcal{P}_n\} \subset \mathbb{F}, \quad H_{d_\lambda} = \mathbb{F} P_\lambda(x)$$

と一次元分解になる．従って $D_x^{(r)} P_\lambda(x) = c P_\lambda(x)$, $c \in \mathbb{F}$ と置ける．すると $P_\lambda(x) = m_\lambda(x) + (\text{低次項})$ と $D_x^{(r)} m_\lambda(x) = d_\lambda^{(r)} m_\lambda(x) + (\text{低次項})$ より $c = d_\lambda^{(r)}$ となって，主張が得られる． □

注意 2.2.3. 可換性定理 2.2.1 の証明は色々と知られている．

- Ruijsenaars の直接的証明 [R87]．論文の表題にも現れている，ある種の函数等式の証明に帰着する．解説が [N23, §5.4.2] にある．
- 量子 KZ (quantum Knizhnik-Zamolodchikov) 方程式を用いる Cherednik の方法 [C92a].
- DAHA (二重アフィン Hecke 環) を用いる Cherednik の方法 [C92b]．本稿で解説する 定理 4.6.2．また [N23, §8.2] でも説明されている．
- 直交性から導出する Macdonald の方法 [M95, Chapter VI, §3]．解説が [N23, §5.4.1] にある，
- 定理 2.2.2 から定理 2.2.1 を示す方法．[N23, §5.3.3 後半] に解説されている．
- 変形 W 代数，ないし $\mathfrak{gl}_1$ 量子トロイダル代数の Fock 表現を用いる方法.

2.3　直交性

注意 1.3.12 で $n = 2$ 変数の Macdonald 対称多項式が Rogers 多項式という q 直交多項式と本質的に同じであることに言及した．実は，一般の n 変数でも直交性がある．そのことを [N23, §5.2] に沿って説明する．

直交内積を導入するのに，パラメータ q, t を複素数であって $0 < |q|, |t| < 1$ だとする．また，固有値の非縮退条件 (1.4.5) が成立すると仮定する．

q 無限積，つまり q シフト積 (1.3.4) の無限積版を

$$(z; q)_\infty := \prod_{k=0}^{\infty} (1 - z q^k) = (1 - z)(1 - zq) \cdots$$

と定める．仮定 $|q| < 1$ より，これは $z \in \mathbb{C}$ の級数として絶対収束し，z の整函数 ($\mathbb{C}$ 上の正則函数) を定める．また有限 q シフト積 (1.3.4) は $(z; q)_m = (z; q)_\infty / (z q^m; q)_\infty$ と書けることに注意する．

次に直交内積の重み函数 (weight function) を定義する．$\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ の直積 $(\mathbb{C}^*)^n$ 上の有理型関数 $w(x) = w(x_1, \dots, x_n)$ を

$$w(x) = w(x; q, t) := \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{(x_i/x_j; q)_\infty}{(t x_i/x_j; q)_\infty} \frac{(x_j/x_i; q)_\infty}{(t x_j/x_i; q)_\infty} \tag{2.3.1}$$

で定義する．これは $x \in (\mathbb{C}^*)^n$ への $\mathfrak{S}_n$ 作用で不変であり，また $x^{-1} := (x_1^{-1}, \dots, x_n^{-1})$ とすると $w(x^{-1}) = w(x)$ である．仮定 $|t| < 1$ から，n 次元トーラス

$$\mathbb{T}^n := \{x \in \mathbb{C}^n \mid |x_1| = \cdots = |x_n| = 1\} \subset (\mathbb{C}^*)^n \tag{2.3.2}$$

の近傍上で $w(x)$ は正則である (詳細は問題 2.3).

$\mathbb{T}^n$ の近傍上の正則函数 $f(x), g(x)$ に対し，双線形形式 $\langle f, g\rangle$ を

$$\langle f, g\rangle := \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{T}^n} f(x^{-1}) g(x) w(x)\, \underline{dx} \tag{2.3.3}$$

で定義する．但し

$$\underline{dx} := \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \frac{dx_1 \cdots dx_n}{x_1 \cdots x_n}$$

は n 次元トーラス $\mathbb{T}^n$ の正規化された Haar 測度である．特に $\int_{\mathbb{T}} \underline{dx} = 1$. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を Macdonald 内積と呼ぶ.

定理 2.3.1. パラメータ q, t が $0 < |q|, |t| < 1$ かつ固有値の非縮退条件 (1.4.5) を満たす複素数の時，

$$\lambda \neq \mu \in \mathcal{P}_n \Longrightarrow \langle P_\lambda, P_\mu \rangle = 0.$$

更にノルム $\langle P_\lambda, P_\lambda\rangle$ の明示式も知られている [M95, Chapter VI, §9, Example 1 (d)].

定理 2.3.1 の証明は以下の 3 段階に分けられる．

(I) Macdonald 内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ に関する q 差分作用素の随伴の考察.

(II) D_x は $\langle \cdot, \cdot \rangle$ に関して自己随伴的であることを示す.

(III) D_x の自己随伴性から P_λ 達の直交性を導出する.

第 I 段階について．まず $n = 1$ 変数の場合に補助的な考察をする．$f(x), g(x)$ が領域 $U \subset \mathbb{C}^*$ 上の正則関数であり，また U 内で閉曲線 C が qC とホモトープだとする．すると Cauchy の定理から

$$\int_C (T_{q,x} f)(x) g(x)\, \underline{dx} = \int_{qC} f(x) (T_{q,x}^{-1} g)(x)\, \underline{dx} = \int_C f(x) (T_{q,x}^{-1} g)(x)\, \underline{dx}. \tag{2.3.4}$$

この応用で，次の準備補題が得られる．

補題 2.3.2 ([N23, §5.2.2])**.** $\mathbb{C}(x)$ 係数の q 差分作用素

$$L_x = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} l_\alpha(x) T_{q,x}^\alpha \quad (\text{有限和}), \quad l_\alpha(x) \in \mathbb{C}(x), \quad T_{q,x}^\alpha := T_{q,x_1}^{\alpha_1} \cdots T_{q,x_n}^{\alpha_n} \quad (\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n)$$

に対し，その形式随伴 (formal adjoint) $L_x^\dagger$ を

$$L_x^\dagger := w(x)^{-1} L_{x^{-1}}^* w(x), \quad L_x^* := \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} T_{q,x}^{-\alpha} a_\mu(x)$$

と定める (動機・由来については注意 2.3.3 参照)．すると，$1 - |q|$ が十分小さい場合，$\mathbb{T}^n$ の近傍上の正則函数 f, g に対して

$$\langle L_x f, g\rangle = \left\langle f, L_x^\dagger g \right\rangle.$$

証明. $(l_\alpha T_{q,x}^\alpha f)(x^{-1}) = l_\alpha(x^{-1}) T_{q,x^{-1}}^\alpha f(x^{-1})$ より

$$\langle L_x f, g\rangle = \int_{\mathbb{T}^n} (L_x f)(x^{-1}) g(x) w(x)\, \underline{dx} = \int_{\mathbb{T}^n} \big(L_{x^{-1}} f(x^{-1})\big) g(x) w(x)\, \underline{dx}$$

$1-|q|$ が十分小さいという仮定から (2.3.4) が使えて

$$= \int_{\mathbb{T}^n} f(x^{-1})\big(L^*_{x^{-1}} g(x)w(x)\big)\, \underline{dx} = \int_{\mathbb{T}^n} f(x^{-1})(L^\dagger_x g)(x)w(x)\, \underline{dx}.$$

□

注意 2.3.3. q 差分作用素の形式随伴は, 微分作用素の形式随伴に由来している [HTT, §1.2, pp.4–21]. D 加群の理論における形式随伴は, 左 D 加群と右 D 加群の対応 $M \mapsto M' := \omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} M$ を, 局所座標を使って書き下したものであった. 微分作用素 $L = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} l_\alpha(z)\partial_z^\alpha$, $\partial_z^\alpha := \partial_{z_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{z_n}^{\alpha_n}$ の形式随伴は $L^\dagger := (-\partial)^\alpha l_\alpha(z)$ と定義される. 微分作用素環 D 上の左加群 M に対して, $s \in M$ への L の右作用を $sL := L^\dagger s$ と定めることで, 右 D 加群 M' が定まる. また, D 加群 $\mathbb{C}[z^{\pm 1}]$ 上の residue pairing $\langle f, g \rangle_z := \int f(z)g(-z)dz$ を考えると, 随伴性 $\langle Lf, g \rangle = \langle f, L^\dagger g \rangle$ が成立する. $x_i = \exp(2\pi\sqrt{-1}z_i)$ の対応で, 微分作用素と q シフト作用素が $\exp((\log q)\partial_{z_i}) = T_{q,x_i}$ と対応する. 同じ対応で, $\langle f, g \rangle_z$ は Macdonald 内積で重み函数 $w(x)$ を 1 に置き換えたものと対応する.

次に第 II 段階について.

補題 2.3.4 ([N23, §5.2.3, §5.4.1])**.** 各 $r = 1, \ldots, n$ に対して, r 階 Macdonald-Ruijsenaars 作用素 $D_x^{(r)}$ は

$$(D_x^{(r)})^\dagger = D_x^{(r)}$$

を満たす. 特に $D_x = D_x^{(1)}$ は Macdonald 内積に関して自己随伴的.

証明. $D_x^{(r)} = \sum_{|I|=r} A_I(x) T_{q,x}^I$ より $D^*_{x^{-1}} = \sum_{|I|=r} T_{q,x}^I A_I(x^{-1})$. 従って

$$D_x^\dagger = w(x)^{-1} D_x^* w(x) = \sum_{|I|=r} w(x)^{-1} T_{q,x_i} A_I(x^{-1}) w(x) = \sum_{|I|=r} w(x)^{-1}\big(T_{q,x}^I A_I(x^{-1})\big)\big(T_{q,x}^I w(x)\big) T_{q,x}^I.$$

ここで $\frac{T_{q,z}(z;q)_\infty}{(z;q)_\infty} = (1-z)^{-1}$ より $\frac{T_{q,x_i} w(x)}{w(x)} = \prod_{j \neq i} \frac{1-tx_i/x_j}{1-x_i/x_j} \frac{1-x_j/qx_i}{1-tx_j/qx_i}$. よって

$$\frac{T_{q,x}^I w(x)}{w(x)} = \prod_{i \in i,\, j \notin I} \frac{1-tx_i/x_j}{1-x_i/x_j} \frac{1-x_j/qx_i}{1-tx_j/qx_i} = \frac{A_i(x)}{T_{q,x}^I A_I(x^{-1})}.$$

従って $(D_x^{(r)})^\dagger = \sum_{|I|=r} A_I(x) T_{q,x}^I = D_x^{(r)}$. □

最後の第 III 段階は形式的な議論で済む. P_λ の固有方程式 $D_x P_\lambda(x) = d_\lambda P_\lambda(x)$ を思い出そう.

補題 2.3.5 ([N23, §5.2.4])**.** D_x が $\langle\cdot,\cdot\rangle$ に関して自己随伴的なので, 任意の $\lambda, \mu \in \mathcal{P}_n$ に対して

$$d_\lambda \langle P_\lambda(x), P_\mu \rangle = \langle D_x P_\lambda(x), P_\mu \rangle = \langle P_\lambda, D_x P_\mu \rangle = d_\mu \langle P_\lambda, P_\mu \rangle.$$

$\lambda \neq \mu$ なら $d_\lambda \neq d_\mu$ なので $\langle P_\lambda, P_\mu \rangle = 0$.

以上で定理 2.3.1 が証明された.

2.4　特殊値の対称性 (双対性)

係数体を $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(q,t)$ に取り直そう. 対称多項式 $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) \in \Lambda_{n,\mathbb{F}} = \mathbb{F}[x]^{\mathfrak{S}_n}$ に対し,

$$t^\delta := (t^{n-1}, t^{n-2}, \ldots, 1) \in \mathbb{F}^n$$

への特殊化 $f(t^\delta)$ を, f の主特殊化 (principal specialization) と呼ぶ.

Schur 多項式 $s_\lambda(x) = \Delta_{\lambda+\delta}(x)/\Delta_\delta(x) \in \Lambda_{n,\mathbb{F}}$ は Macdonald 対称多項式の $t = q$ 特殊化と一致するのだった (問題 1.3):

$$P_\lambda(x; q, q) = s_\lambda(x).$$

補題 2.4.1 ([M95, Chapter I, §3, Example 1], [N23, Proposition 3.1])**.** Schur 多項式の主特殊化は次の明示式を持つ.

$$s_\lambda(t^\delta) = t^{n(\lambda)} \prod_{1\le i<j\le n} \frac{1-t^{\lambda_i-\lambda_j+j-i}}{1-t^{j-i}}, \quad n(\lambda) \coloneqq \sum_{i=1}^n (i-1)\lambda_i.$$

特に $s_\lambda(t^\delta) \neq 0$ であり, また $P_\lambda(t^\delta; q, t) \neq 0$ である.

証明. $\Delta_{\lambda+\delta}(x) = \det(x_i^{\lambda_j+n-j})_{i,j=1}^n$ より $\Delta_{\lambda+\delta}(t^\delta) = \det(t^{(n-i)(\lambda_j+n-j)})_{i,j=1}^n = \Delta(t^{\lambda+\delta})$. よって

$$s_\lambda(t^\delta) = \Delta(t^{\lambda+\delta})/\Delta(t^\delta) = \prod_{1\le i<j\le n} \frac{t^{\lambda_i+n-i} - t^{\lambda_j+n-j}}{t^{n-i}-t^{n-j}} = \prod_{1\le i<j\le n} t^{\lambda_j} \frac{1-t^{\lambda_i-\lambda_j+j-i}}{1-t^{j-i}}.$$

これから前半の主張を得る. すると $P_\lambda(t^\delta; q, q) = s_\lambda(t^\delta) \neq 0$ だから, 特殊化する前の $P_\lambda(t^\delta; q, t)$ も $\neq 0$. □

Macdonald 対称多項式の主特殊化 $P_\lambda(t^\delta; q, t)$ の明示式も知られているが, 本稿では扱わない. [M95, Chapter VI, (6.11)] や [N23, Theorem 6.1] を参照されたい.

特殊値の対称性 (双対性) とは, P_λ に関する次の主張を指す.

定理 2.4.2. 各 $\lambda \in \mathcal{P}_n$ に対し, 正規化された Macdonald 対称多項式 $\widetilde{P}_\lambda(x)$ を

$$\widetilde{P}_\lambda(x) \coloneqq P_\lambda(x)/P_\lambda(t^\delta)$$

で定義する. また $\lambda, \mu \in \mathcal{P}_n$ に対し $q^\lambda t^\delta \coloneqq (q^{\lambda_1}t^{n-1}, q^{\lambda_2}t^{n-2}, \dots, q^{\lambda_n})$, $q^\mu t^\delta \coloneqq (q^{\mu_1}t^{n-1}, q^{\mu_2}t^{n-2}, \dots, q^{\mu_n})$ と定義すると

$$\widetilde{P}_\lambda(q^\mu t^\delta) = \widetilde{P}_\mu(q^\lambda t^\delta).$$

注意 2.4.3. 作用素族 $\{D_x^{(r)} \mid r = 1, \dots, n\}$ の可換性の証明 (注意 2.2.3) と同様に, P_λ の双対性にも幾つか証明がある.

- Koornwinder による直接的証明. [M95, Chapter VI, (6.6)] 及び [N23, §6.4] に説明がある.
- DAHA の Cherednik 対合 [C92b, C05] からの導出. 本稿で説明する. [N23, §8.5] にも説明がある.
- $\mathfrak{gl}_1$ 量子トロイダル代数の Fourier 双対性からの導出.

この節で説明した Macdonald 対称多項式の性質 (同時固有函数, 直交性, 双対性) は, 一般のルート系に付随した Macdonald 多項式でも現れる. 次節では, Macdonald 対称多項式の場合に特化した話を続ける.

2.5　レポート問題

問題 2.1. (2.1.1) の等式を示せ.

問題 2.2 ([M95, Chapter I, §6, Example 11[*4]], [白 03, (3.157)])**.** 分割 $\lambda \in \mathcal{P}_n$ に対して

$$m_\lambda(x) = \sum_{\alpha\in\mathfrak{S}_n.\lambda} s_\alpha(x)$$

[*4] 1 文目に誤植があって, 正しくは “be a partition of length $\le n$” のはず.

となることを示せ.

問題 2.3. $0 < |q|\,, |t| < 1$ を満たす複素数パラメータ q, t に対し, (2.3.1) の重み函数 $w(x)$ がその上で正則になるような, (2.3.2) のトーラス $\mathbb{T}^n$ を含む開近傍を構成し, 明示せよ.

3 Macdonald 対称多項式の諸性質

Macdonald 対称多項式の性質には, 変数の数 n によらないものが幾つかある. それらを調べる際, 無限変数版の対称多項式を導入すると議論が易しくなる. この思想に基づいて書かれているのが [M95, Chapter VI] である.

3.1 対称函数環と Macdonald 対称函数

議論を始める前に, 分割に関する用語を幾つか導入しよう. より詳しい説明は [M95, Chapter I, §1] 等を参照されたい.

- 分割 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{P}_n$ と, それに 0 を幾つか付け加えたもの $(\lambda_1, \dots, \lambda_n, 0, \dots, 0) \in \mathcal{P}_{n+k}$ を同一視する. また $\mathcal{P}_0 := \{()\} = \{(0)\} = \{(0, \dots, 0)\}$ とする. この同一視のもと, $\mathcal{P} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_n$ と書く.
- 分割 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{P}_n$ に対し, その長さ $\ell(\lambda) \in \mathbb{N}$ を次式で定義する.

$$\ell(\lambda) := |\{j = 1, \dots, n \mid \lambda_j > 0\}| . \tag{3.1.1}$$

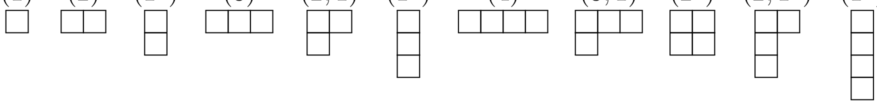
- 分割 $\lambda \in \mathcal{P}$ に対応する Young 図形とは, 格子点の集合

$$\{(i, j) \in (\mathbb{Z}_{>0})^2 \mid i \le \ell(\lambda),\ j \le \lambda_i\} \tag{3.1.2}$$

のことである. 図示する際は, 格子点の代わりに, それを中心とする箱 (一辺の長さ 1 の正方形) を並べて描くことが多い. また, 座標 (i, j) の取り方によって英国流・仏国流など様々な方法がある. 英国流で描くと:

分割	(1)	(2)	(1^2)	(3)	$(2,1)$	(1^3)	(4)	$(3,1)$	(2^2)	$(2,1^2)$	(1^4)

Young 図形



- $\lambda \in \mathcal{P}_n$ の転置 λ' を

$$\lambda' := (\lambda'_1, \dots, \lambda'_n) \in \mathcal{P}_n, \quad \lambda'_i := |\{j = 1, \dots, n \mid \lambda_j \ge i\}|$$

で定義する. これは, λ に対応する Young 図形を対角線にそって折り返し, 得られた Young 図形に対応する分割とも言い換えられる. また, $\lambda'_1 = \ell(\lambda)$, $\ell(\lambda') = \lambda_1$ に注意する.

まず最初の観察として, 単項対称式が変数の個数増加に対して安定性を持つことを示そう.

補題 3.1.1 (c.f. [M95, Chapter VI, (4.10)]). $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$ と $\lambda \in \mathcal{P}_n$ に対して

$$m_\lambda(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) = \begin{cases} m_\lambda(x_1, \dots, x_m) & (\ell(\lambda) \le m) \\ 0 & (\ell(\lambda) > m) \end{cases}.$$

また $\ell(\lambda) > m$ なら $P_\lambda(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) = 0$.

証明. $\ell(\lambda) \le m$ の場合は単項対称式の定義 1.2.2 から明らか. 次に $\ell(\lambda) > m$ の場合について. ドミナンス順序 $\le$ に関して, $\mu \le \lambda$ ならば $\mu' \ge \lambda'$ だから (問題 3.1), $\ell(\mu) = \mu'_1 \ge \lambda'_1 = \ell(\lambda)$. よって $\ell(\lambda) > m$ なら $\ell(\mu) > m$ なので $m_\mu(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) = 0$. 特に $m_\lambda(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$ は 0 であり, $P_\lambda(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) \in \sum_{\mu \le \lambda} \mathbb{F} m_\mu(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$ も 0 である. $\square$

この観察を踏まえて, 対称多項式環の無限変数極限を導入する．まず $m,n\in\mathbb{N}$, $m\le n$ に対し, 多項式環の全射準同型

$$\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n]\twoheadrightarrow\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_m],\quad x_i\longmapsto\begin{cases}x_i & (i\le m)\\ 0 & (i>m)\end{cases}$$

を考える．これを部分環 $\Lambda_n=\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}\subset\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n]$ に制限して, 環準同型

$$\rho_{n,m}\colon\Lambda_n\longrightarrow\Lambda_m \tag{3.1.3}$$

を得る．但し $\Lambda_0:=\mathbb{Z}$ と約束する．系 1.3.7 より $\{m_\lambda\mid\lambda\in\mathcal{P},\ \ell(\lambda)\le n\}$ が Λ_n の基底だから, 補題 3.1.1 より ρ_{nm} は全射である．多項式次数 d の部分加群 $\Lambda_n^d\subset\Lambda_n$ (1.2.3) に制限すると, 加群準同型

$$\rho_{n,m}^d\colon\Lambda_n^d\longrightarrow\Lambda_m^d$$

が得られる．補題 3.1.1 より $\rho_{n.m}^d$ は常に全射であり, $n\ge m\ge d$ なら全単射である．

$\rho_{n,n}^d=\mathrm{id}$ と $\rho_{m,l}\circ\rho_{n,m}=\rho_{n,l}$ が成立するので, $\bigl((\Lambda_n^d)_{n\in\mathbb{N}},(\rho_{n,m}^d)_{m\le n}\bigr)$ は加群の射影系である．この射影系の射影極限を次のように書く．

$$\Lambda^d:=\varprojlim_n\Lambda_n^d.$$

Λ^d は自由加群であり, その元 $f=(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は d 次対称多項式 $f_n=f_n(x_1,\dots,x_n)\in\Lambda_n^d$ の列であって, $f_n(x_1,\dots,x_m,0,\dots,0)=f_m(x_1,\dots,x_m)$ $(m\le n)$ を満たすものである．

$n\ge m\ge d$ なら $\rho_{n,m}^d$ が同型であることから, 射影

$$\rho_n^d\colon\Lambda^d\longrightarrow\Lambda_n^d,\quad f\longmapsto f_n$$

は $n\ge d$ なら同型である．すると補題 3.1.1 より, 分割 $\lambda\in\mathcal{P}$, $|\lambda|=d$ に対して, 次の m_λ が一意に定まる．

$$m_\lambda\in\Lambda^d,\quad\rho_n^d(m_\lambda)=m_\lambda(x_1,\dots,x_n)\quad(n\le d)$$

m_λ を単項対称函数 (monomial symmetric function) と呼ぶ．$\{m_\lambda\mid\lambda\in\mathcal{P},\ |\lambda|=d\}$ は Λ^d の基底である．

次数 d に関して直和を取った

$$\Lambda:=\textstyle\bigoplus_{d\in\mathbb{N}}\Lambda^d$$

は $\{m_\lambda\mid\lambda\in\mathcal{P}\}$ を基底にもつ自由加群である．また, 対称多項式環 Λ_n の次数付き環構造 (積は多項式の掛算) によって, Λ にも次数付き環の構造が入る．次数付き環 Λ を無限変数 $x=(x_1,x_2,\dots)$ の対称函数環 (ring of symmetric functions) と呼ぶ．

$$\rho_n:=\textstyle\bigoplus_{d\in\mathbb{N}}\rho_n^d\colon\Lambda\longrightarrow\Lambda_n \tag{3.1.4}$$

は次数付き環の全射準同型である．

係数環 $\mathbb{Z}$ を任意の可換環 R に取り換えても同様の議論が成立する．それで得られる次数付き環を

$$\Lambda_R=\textstyle\bigoplus_{d\in\mathbb{N}}\Lambda_R^d$$

と書き, R 係数の対称函数環と呼ぶ．$\Lambda_R\cong\Lambda\otimes_{\mathbb{Z}}R$ である．特に係数環が $\mathbb{F}=\mathbb{Q}(q,t)$ の場合を考えよう．

定理 3.1.2 (c.f. [M95, Chapter VI, §§1–4])**.** 各 $\lambda\in\mathcal{P}$ に対し, 次の性質を満たす P_λ が一意に存在する．

$$P_\lambda\in\Lambda_{\mathbb{F}},\quad\rho_n(P_\lambda)=P_\lambda(x_1,\dots,x_n)\in\Lambda_{n,\mathbb{F}}.$$

但し右辺で $\ell(\lambda)>n$ の場合は, $P_\lambda(x_1,\dots,x_n):=P_\lambda(x_1,\dots,x_n,0,\dots,0)$ と $\ell(\lambda)$ 変数に補完している (補題 3.1.1 後半より 0 と等しい)．そして $\{P_\lambda\mid\lambda\in\mathcal{P}\}$ は $\mathbb{F}$ 係数対称函数環 $\Lambda_{\mathbb{F}}$ の $\mathbb{F}$ 基底である．この P_λ を Macdonald 対称函数と呼ぶ．

3.2 Macdonald 対称函数の一意存在

定理 3.1.2 の証明を概説する．以下の 3 段階に分ける．

(I) $\Lambda_{\mathbb{F}} = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}} \Lambda_{\mathbb{F}}^d$ 上の次数を保つ q 差分作用素 E の構成.

(II) 三角性を持つ E の固有函数として $P_\lambda \in \Lambda_{\mathbb{F}}$ が一意存在することを示す.

(III) $\rho_n(P_\lambda) = P_\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ を示す.

第 I,II 段階は [M95, Chapter VI, §3, §4] で議論されていて，また [白 03, 第 3 章] にも解説がある．

第 I 段階について．次の第 II 段階から推測されるように，構成したい E は 1 階の Macdonald-Ruijsenaars 作用素 (定義 1.3.1) の無限変数類似である．しかし注意するべき点があるので，その説明から始めよう．

構成したい E は $\Lambda_{\mathbb{F}}^d = \varprojlim_n \Lambda_{n,\mathbb{F}}^d$ 上の線形作用素だから，列 $E = (E_n \colon \Lambda_n^d \to \Lambda_n^d)_{n \in \mathbb{N}}$ であって，各 $n \ge m$ について，図式

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_n^d & \xrightarrow{E_n} & \Lambda_n^d \\ {\scriptstyle \rho_{n,m}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho_{n,m}} \\ \Lambda_m^d & \xrightarrow{E_m} & \Lambda_m^d \end{array} \tag{3.2.1}$$

を可換にするものである．1 階の Macdonald-Ruijsenaars 作用素を，変数の個数 n を明記して

$$D_n := D_x^{(1)} = \textstyle\sum_{i=1}^n A_i T_{q,x_i} \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}} \Lambda_{n,\mathbb{F}}$$

と表すことにして，上記図式の E_n を D_n にしたものが可換か否かを調べよう．Λ_n^d の基底である単項対称式 $m_\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ $(|\lambda| = d)$ の行き先を見ると，補題 1.4.2 より

$$D_n m_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = d_\lambda^n m_\lambda(x_1, \ldots, x_n) + \cdots, \quad d_\lambda^n := \textstyle\sum_{i=1}^n q^{\lambda_i} t^{n-i}. \tag{3.2.2}$$

特に $n \neq m$ なら $d_\lambda^n \neq d_\lambda^m$ に注意する．このことと補題 3.1.1 より，$n > m \ge \ell(\lambda)$ なら

$$\begin{array}{ccc} m_\lambda(x_1, \ldots, x_n) & \xmapsto{D_n} & d_\lambda^n m_\lambda(x_1, \ldots, x_n) + \cdots \\ {\scriptstyle \rho_{n,m}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho_{n,m}} \\ m_\lambda(x_1, \ldots, x_m) & \xrightarrow{D_m} & d_\lambda^m m_\lambda(x_1, \ldots, x_m) + \cdots \end{array}$$

となって，可換にならない．

この議論で可換性の障害になっているのは，$D_n = D_x^{(1)}$ に関する $P_\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ の固有値 d_λ^n が，(3.2.2) のように変数の数 n に依存していることである．そこで D_n と恒等写像の線形結合を取って，固有値が n に依存しないようにしてみよう．[M95, Chapter VI, (4.1)] は

$$E_n := t^{-n} D_n - \sum_{i=1}^n t^{-i} \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}} \Lambda_{n,\mathbb{F}} \tag{3.2.3}$$

とした．問題 2.2 の $m_\lambda(x) = \sum_{\alpha \in \mathfrak{S}_n . \lambda} s_\alpha(x)$ と (2.1.2) の u^1 係数を取った $D_n m_\lambda(x) = \sum_{\alpha \in \mathfrak{S}_n . \lambda} d_\alpha s_\alpha(x)$, $d_\alpha := \sum_{i=1}^n q^{\alpha_i} t^{n-i}$ から

$$\begin{aligned} &E_n m_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = \textstyle\sum_{\alpha \in \mathfrak{S}_n . \lambda} \epsilon_\alpha^n s_\alpha(x_1, \ldots, x_n), \\ &\epsilon_\alpha^n := t^{-n} d_\lambda^n - \textstyle\sum_{i=1}^n t^{-i} = \sum_{i=1}^n (q^{\alpha_i} - 1) t^{-i}. \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

この等式 (3.2) から, $m = n-1$ の場合の図式 (3.2.1) の可換性

$$\rho_{n,n-1} \circ E_n = E_n \circ \rho_{n,n-1}$$

が従い, そして任意の $m \leq n$ に対する可換性が従う. 実際, 任意の $\lambda \in \mathcal{P}_n$ に対して

$$(\rho_{n,n-1} \circ E_n - E_n \circ \rho_{n,n-1}) m_\lambda(x) = \rho_{n,n-1}\bigl(\textstyle\sum_{\alpha \in \mathfrak{S}_n.\lambda} q^{\alpha_n} s_\alpha(x) - m_\lambda(x)\bigr)$$

だが, $s_\alpha(x) = \Delta_{\alpha+\delta}(x)/\Delta(x)$ より, $\alpha_n \neq 0$ なら $\rho_{n,n-1} s_\alpha(x) = s_\alpha(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = 0$ だから

$$= \sum_{\alpha \in \mathfrak{S}_n.\lambda,\, \alpha_n \neq 0} q^{\alpha_n} s_\alpha(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) - m_\lambda(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0).$$

$\ell(\lambda) \geq n$ の場合は補題 3.1.1 から, これは $0 - 0 = 0$. $\ell(\lambda) < n$ ならこれは $\sum_{\alpha \in \mathfrak{S}_{n-1}.\lambda} s_\alpha(x_1, \ldots, x_{n-1}) - m_\lambda(x_1, \ldots, x_{n-1})$ で, 問題 2.2 からやはり 0.

定義 3.2.1 ([M95, Chapter VI, (4.3)]). $\Lambda_\mathbb{F}$ 上の線形作用素 E が次で well-defined.

$$E \coloneqq \varprojlim_n E_n.$$

これを 1 階の無限変数 Macdonald 作用素[*5]と呼ぶ.

以上で第 I 段階が終わった. 第 II 段階は有限変数の場合と同様で, 形式的議論で済む.

$\mathcal{P}_n$ 上のドミナンス順序の定義 1.3.4 は, そのまま $\mathcal{P} = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{P}_n$ 上に拡張される. それも同じ記号 $\leq$ で書いてドミナンス順序と呼ぶ. $\lambda \leq \mu$ なら $|\lambda| = |\mu|$ なので, 各 $\lambda \in \mathcal{P}$ に対し, $\{\mu \in \mathcal{P} \mid \mu < \lambda\}$ が有限集合であることに注意する.

定理 3.2.2 ([M95, Chapter VI, §4]). 各 $\lambda \in \mathcal{P}$ に対し, 次を満たす $P_\lambda \in \Lambda_\mathbb{F}$ が一意に存在する.

(i) [三角性] $P_\lambda \in m_\lambda + \sum_{\mu < \lambda} \mathbb{F} m_\mu$.

(ii) [固有性] P_λ は Macdonald 作用素 E の固有函数.

更に固有値は $\epsilon_\lambda \coloneqq \sum_{i \geq 1} (q^{\lambda_i} - 1) t^{-i}$. この和は $\sum_{i=1}^{\ell(\lambda)}$ であって, 特に有限和であることに注意する. この対称函数 P_λ を Macdonald 対称函数と呼ぶ.

証明. $n \geq \ell(\lambda)$ なら, (3.2) の ϵ_λ^n が ϵ_λ に等しいことに注意する. 命題 1.4.4 の議論において $\Lambda_{n,\mathbb{F}}$ を Λ_n に, $d_{\lambda\lambda}$ を ϵ_λ に取り換えると, $\{\mu \in \mathcal{P} \mid \mu < \lambda\}$ が有限集合であることから同じ議論が進んで, 主張が得られる. □

最後に第 III 段階を済ませよう. (3.1.4) の射影 $\rho_n \colon \Lambda_\mathbb{F} \to \Lambda_{n,\mathbb{F}}$ を思い出してほしい. また, 0 変数の Macdonald 対称多項式を $P_\lambda() \coloneqq 1 \in \Lambda_{0,\mathbb{F}}$ で定義する. そして $n < \ell(\lambda)$ の場合, 定理 3.1.2 にあるように, $P_\lambda(x_1, \ldots, x_n) \coloneqq P_\lambda(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$ と $\ell(\lambda)$ 変数に補完する.

補題 3.2.3. Macdonald 対称函数 $P_\lambda \in \Lambda_\mathbb{F}$ は, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\rho_n(P_\lambda) = P_\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ を満たす. 逆に, この性質を満たす $\Lambda_\mathbb{F}$ の元は P_λ と一致する.

証明. 無限変数 Macdonald 作用素 E の定義 3.2.1 から $\rho_n \circ E = E_n \circ \rho_n$ なので $E_n\bigl(\rho_n(P_\lambda)\bigr) = \epsilon_\lambda \rho_n(P_\lambda)$. 一方で (3.2.3) より E_n は D_n の一次式だから, Macdonald 対称多項式 $P_\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ は E_n の固有函数で,

[*5] 本稿独自の用語.

固有値は (3.2) の ϵ_λ^n. $n \geq \ell(\lambda)$ なら $\epsilon_\lambda^n = \epsilon_\lambda$ だから, $\rho_n(P_\lambda)$ は $P_\lambda(x_1,\dots,x_n)$ と比例し, 三角性と $m_\lambda(x)$ の安定性 (補題 3.1.1) より比例定数は 1. また $n < \ell(\lambda)$ なら, 補題 3.1.1 後半と同様の議論で $\rho_n(P_\lambda) = 0$ であり, $P_\lambda(x_1,\dots,x_n) = 0$ と一致する. 後半の一意性は, 射影極限の定義から直ちに従う. □

3.3 Macdonald 対称函数の直交性と Macdonald-Cauchy 核

有限変数の場合 (定理 2.3.1) と同様に, Macdonald 対称函数も直交性を持つ. 但し, 当然ながら有限変数の時の Macdonald 内積 (2.3.3) を対称函数に用いることはできない. Macdonald は [M95, Chapter VI, §1, §2] において, Schur 対称函数や Hall-Littlewood 対称函数の直交内積の拡張として, 問題の内積を導入した.

まず (1.2.5) の n 変数冪和対称式 $p_r(x) \coloneqq \sum_{i=1}^n x_i^r = m_{(r)}(x)$ を思い出そう. 単項対称函数 $m_{(r)} \in \Lambda$ を $p_r \coloneqq m_{(r)}$ と書いて, 冪和対称函数 (power sum symmetric function) と呼ぶ. 次の主張の証明は問題 3.3 にする.

事実 3.3.1. $\mathbb{Q}$ 係数対称函数環 $\Lambda_\mathbb{Q} = \Lambda \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q}$ について $\Lambda_\mathbb{Q} = \mathbb{Q}[p_1, p_2, \dots]$. 特に p_r 達は $\mathbb{Q}$ 上代数独立.

分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots) \in \mathcal{P}$ に対して

$$p_\lambda \coloneqq p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \cdots \in \Lambda$$

と定めると, 事実 3.3.1 より $\{p_\lambda \mid \lambda \in \mathcal{P}\}$ は $\Lambda_\mathbb{Q}$ の $\mathbb{Q}$ 基底である. そこで, $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(q,t)$ として:

定義 3.3.2 ([M95, Chapter VI, §2]). $\Lambda_\mathbb{F}$ 上の対称双線形型式 $\langle \cdot, \cdot \rangle_\infty \equiv \langle \cdot, \cdot \rangle_{\infty,q,t}$ を次で定義する.

$$\langle p_\lambda, p_\mu \rangle_\infty \coloneqq \delta_{\lambda,\mu} z_\lambda(q,t) \quad (\lambda, \mu \in \mathcal{P}),$$

$$z_\lambda(q,t) \coloneqq z_\lambda \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \frac{1-q^{\lambda_i}}{1-t^{\lambda_i}}, \quad z_\lambda \coloneqq \prod_{j \geq 1} j^{m_j(\lambda)} m_j(\lambda)!, \quad m_j(\lambda) \coloneqq |\{i = 1, 2, \dots \mid \lambda_i = j\}|.$$

定理 3.3.3 ([M95, (4.7)]). Macdonald 対称函数 P_λ は定義 3.3.2 の $\langle \cdot, \cdot \rangle_\infty$ に関する $\Lambda_\mathbb{F}$ の直交基底である.

本稿では証明の概略のみ説明する.

まず定義 3.3.2 の内積について, $\{p_\lambda \mid \lambda \in \mathcal{P}\}$ と $\{z_\lambda(q,t)^{-1} p_\lambda \mid \lambda \in \mathcal{P}\}$ は双対基底である. そこで, 対応する核函数を考えよう. 二組の不定元列 $x = (x_1, x_2, \dots)$ と $y = (y_1, y_2, \dots)$ を用意し, それぞれを変数とする $\mathbb{F}$ 係数対称函数環を $\Lambda_\mathbb{F}(x)$, $\Lambda_\mathbb{F}(y)$ とする. それらの元として, 例えば冪和対称函数 $p_r(x) = \sum_{i \geq 1} x_i^r \in \Lambda_\mathbb{F}(x)$, $p_r(y) = \sum_{i \geq 1} y_i^r \in \Lambda_\mathbb{F}(y)$ がある. $\Lambda_\mathbb{F}(x) \otimes_\mathbb{F} \Lambda_\mathbb{F}(y)$ は $\Lambda_\mathbb{F}(x,y) = \Lambda_\mathbb{F}(x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots)$ と次数付き環として同型である. 次数に関してテンソル積を完備化したものを $\Lambda_\mathbb{F}(x) \widehat{\otimes}_\mathbb{F} \Lambda_\mathbb{F}(y)$ と書く.

定義 3.3.4. $\Lambda_\mathbb{F}(x) \widehat{\otimes}_\mathbb{F} \Lambda_\mathbb{F}(y)$ の元 $\Pi(x;y)$ を

$$\Pi(x;y) = \Pi(x;y;q,t) \coloneqq \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} z_\lambda(q,t) p_\lambda(x) p_\lambda(y)$$

で定義し, Macdonald-Cauchy 核と呼ぶ (名称の由来は下の注意 3.3.6 参照).

$\Pi(x;y)$ が内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_\infty$ に対応した核函数である. それを使って以下のように議論を進める.

(1) $\Lambda_\mathbb{F}(x) \widehat{\otimes}_\mathbb{F} \Lambda_\mathbb{F}(y)$ において次の等式が成立する [M95, (2.5),(2.6)].

$$\Pi(x;y) = \prod_{n \geq 1} \exp\Big(\frac{1}{n} \frac{1-t^n}{1-q^n} p_n(x) p_n(y) \Big) = \prod_{i,j} \frac{(t x_i y_j; q)_\infty}{(x_i y_j; q)_\infty}.$$

(2) 展開 $\Pi(x;y) = \sum_{\lambda\in\mathcal{P}} g_\lambda(x)m_\lambda(y)$ によって $g_\lambda = g_\lambda(x;q,t) \in \Lambda_{\mathbb{F}}$ を定義すると，$\{g_\lambda \mid \lambda\in\mathcal{P}\}$ は $\{m_\lambda \mid \lambda\in\mathcal{P}\}$ の双対基底である [M95, (2.11)].

(3) $\{g_\lambda(x_1,\dots,x_n) \mid \lambda\in\mathcal{P}_n\}$ は $\Lambda_{n,\mathbb{F}}$ の $\mathbb{F}$ 基底である [M95, (2.19)].

(4) $\Lambda_{n,\mathbb{F}}$ 上の内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle_n$ で $\langle g_\lambda, m_\mu\rangle_n = \delta_{\lambda,\mu}$ $(\lambda,\mu\in\mathcal{P}_n)$ となるものが一意に定まる [M95, (2.20)][*6].

(5) Macdonald-Ruijsenaars q 差分作用素 $D_n^{(r)} \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}\,\Lambda_{n,\mathbb{F}}$ は $\langle\cdot,\cdot\rangle_n$ に関して自己随伴的 [M95, (3.11)].

(6) 無限変数 Macdonald 作用素 $E \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}\,\Lambda_{\mathbb{F}}$ は $\langle\cdot,\cdot\rangle_\infty$ に関して自己随伴的 [M95, (4.6)].

(7) 定理 3.3.3 を示す.

最後の段階は有限変数の場合 (補題 2.3.5) と同様である．最も非自明な段階は (5) で，(2.1.1) で導入した有限変数の q 差分作用素の母函数 $D_x(u) = \sum_{r=0}^n u^r D_x^{(r)}$ と Macdonald-Cauchy 核に関する等式

$$D_x(u)\Pi(y_1,\dots,y_n;y_1,\dots,y_n) = D_y(u)\Pi(x_1,\dots,x_n;y_1,\dots,y_n)$$

の証明に帰着される．この部分は [N23, §6.6.1] に核函数関係式 (kernel identity) として解説されている．

この時点で以下の諸性質を示すことができる．既に示した性質も一部再掲する．

事実 3.3.5. (1) $\{P_\lambda \mid \lambda\in\mathcal{P}\} \subset \Lambda_{\mathbb{F}}$ は次の二条件で特徴づけられる．

(i) [三角性] $P_\lambda \in m_\lambda + \sum_{\mu<\lambda}\mathbb{F}\mu_\lambda$.

(ii) [直交性] $\mu\neq\lambda$ なら $\langle P_\lambda, P_\mu\rangle_\infty = 0$.

(2) $r\in\mathbb{N}$ に対して $g_r := g_{(r)} \in \Lambda_{\mathbb{F}}$ と書くと，任意の $\lambda\in\mathcal{P}$ に対して $g_\lambda = g_{\lambda_1}g_{\lambda_2}\cdots$. また

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n(x)u^n = \prod_{i\geq 1}\frac{(tx_iu;q)_\infty}{(x_iu;q)_\infty}.$$

(3) 基本対称函数 $e_r := m_{(1^r)} \in \Lambda$ 及び前項の g_r について $r\in\mathbb{N}$ に対して

$$P_{(1^r)} = e_r, \quad P_{(r)} = \tfrac{(q;q)_r}{(t;q)_r}g_r.$$

(4) Schur 対称函数 $s_\lambda(x)\in\Lambda$, $\rho_n(s_\lambda) = s_\lambda(x_1,\dots,x_n)$ について

$$P_\lambda(x;q,t=q) = s_\lambda(x).$$

(5) $\lambda\in\mathcal{P}$ に対して

$$b_\lambda = b_\lambda(q,t) := \langle P_\lambda, P_\lambda\rangle_\infty^{-1} \in \mathbb{F}, \quad Q_\lambda = Q_\lambda(x;q,t) := b_\lambda P_\lambda \in \Lambda_{\mathbb{F}}$$

と定めると，

$$\langle P_\lambda, Q_\mu\rangle_\infty = \delta_{\lambda,\mu}, \quad \textstyle\sum_{\lambda\in\mathcal{P}} P_\lambda(x)Q_\mu(y) = \Pi(x;y), \quad Q_{(r)} = g_r.$$

(6) $\mathbb{F}$ 代数 $\Lambda_{\mathbb{F}} = \mathbb{F}[p_1,p_2,\dots]$ の自己準同型 $\omega_{q,t}$ を

$$\omega_{q,t}(p_r) := (-1)^{r-1}\tfrac{1-q^r}{1-t^r}p_r$$

で定義すると，$\lambda\in\mathcal{P}$ とその転置 λ' について

$$\omega_{q,t}P_\lambda(x;q,t) = Q_{\lambda'}(q,t), \quad \omega_{q,t}Q_\lambda(x;q,t) = P_{\lambda'}(q,t), \quad b_\lambda(q,t)b_{\lambda'}(t,q) = 1.$$

[*6] 誤植あり.

(7) [M95, (5.3)][*7], [N23, Theorem 6.5, §6.6.2] 双対 Macdonald-Cauchy 核:

$$\prod_{i,j}(1+x_iy_i) = \sum_{\lambda\in\mathcal{P}} P_\lambda(x;q,t)P_{\lambda'}(y;t,q) = \sum_{\lambda\in\mathcal{P}} Q_\lambda(x;q,t)Q_{\lambda'}(y;t,q)$$

この時点では (5) の $b_\lambda \in \mathbb{F}$, つまり P_λ のノルムを求めるのは困難である. 次の副節で明示式を紹介する.

注意 3.3.6. Macdonald-Cauchy 核の名前の由来は, $t=q$ とすると Schur 多項式の核函数

$$\Pi(x;y;q,t=q) = \prod_{i,j}\tfrac{1}{1-x_iy_j} = \sum_\lambda s_\lambda(x)s_\lambda(y)$$

となり, Cauchy の行列式公式

$$\det(\tfrac{1}{\lambda_i-\mu_j})_{i,j=1}^n = \frac{\prod_{i<j}(\lambda_i-\lambda_j)(\mu_j-\mu_i)}{\prod_{i,j}(\lambda_i-\mu_j)} \tag{3.3.1}$$

と同値なものになるからである. 詳しい説明が [N23, §3.3] にある.

最後に, $\Lambda_\mathbb{F}$ 上の内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle_\infty$ と $\Lambda_{n,\mathbb{F}}$ 上の内積 (2.3.3)

$$\langle f,g\rangle \coloneqq \frac{1}{n!}\int_{\mathbb{T}^n} f(x^{-1})g(x)w(x)\,\underline{dx},$$
$$w(x) \coloneqq \prod_{1\le i<j\le n}\frac{(x_i/x_j;q)_\infty}{(tx_i/x_j;q)_\infty}\frac{(x_j/x_i;q)_\infty}{(tx_j/x_i;q)_\infty}, \quad \underline{dx} \coloneqq \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n}\frac{dx_1\cdots dx_n}{x_1\cdots x_n}$$

の比較を紹介する.

事実 3.3.7 ([M95, Chapter VI, (9.9)])**.** $\Lambda_{n,\mathbb{F}}$ 上の内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle_n''$ を

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_n'' \coloneqq c_n^{-1}\langle\cdot,\cdot\rangle, \quad c_n \coloneqq \frac{1}{n!}\int_{\mathbb{T}^n} w(x)\underline{dx}$$

で定義すると, 任意の $f,g\in\Lambda_\mathbb{F}$ に対して

$$\langle f,g\rangle_\infty = \lim_{n\to\infty}\langle\rho_n f,\rho_n g\rangle_n''.$$

但し $\rho_n\colon \Lambda_\mathbb{F}\to\Lambda_{n,\mathbb{F}}$ は標準射影.

3.4 Pieri 公式とタブロー表示

対称函数の空間 $\Lambda_\mathbb{F}$ は対称函数の積に関して環をなすので，Macdonald 対称函数 P_μ と P_ν の積 $P_\mu P_\nu$ は再び対称函数になる. $\{P_\lambda \mid \lambda\in\mathcal{P}\}$ は $\Lambda_\mathbb{F}$ の基底だから, 積 $P_\mu P_\nu$ を P_λ 達で展開することができる. 対称函数の次数に注目すると $\deg P_\lambda = |\lambda|$ だから, 展開は

$$P_\mu P_\nu = \sum_{\lambda\in\mathcal{P},\,|\lambda|=|\mu|+|\nu|} c_{\mu\nu}^\lambda P_\lambda$$

と表せる. 係数 $c_{\mu\nu}^\lambda$ を Macdonald 対称函数の Littlewood-Richardson 係数と呼ぶことにしよう.

[*7] 誤植あり.

注意 3.4.1. この名前は, $t = q$ の場合が Schur 多項式 (問題 1.3) の Littlewood-Richardson 係数 [M95, Chapter I, §9] と一致することに由来する.

特に $\nu = (1^r)$ の場合を考えると, 事実 3.3.5 (3) より $P_{(1^r)}$ は基本対称函数 e_r と等しい. この場合の Littlewood-Richardson 係数 $c^{\lambda}_{\mu,(1^r)}$ については, 因数分解された明示式が知られている ([M95, §6], [N23, Theorem 6.3]).

事実 3.4.2 (Macdonald 対称多項式の Pieri 公式)**.** $\mu \in \mathcal{P}$ と $r = 1, 2, \ldots$ に対し,

$$e_r P_\mu = \sum_{\lambda \in \mathcal{P},\, |\lambda|-|\mu|=r} \psi'_{\lambda/\mu}(q,t) P_\lambda, \quad \psi'_{\lambda/\mu}(q,t) := \psi_{\lambda'/\mu'}(t,q),$$

$$\psi_{\lambda/\mu}(q,t) := \prod_{1 \le i \le j \le \ell(\mu)} \frac{(q^{\mu_i-\mu_j}t^{j-i+1};q)_{\lambda_i-\mu_i}}{(q^{\mu_i-\mu_j+1}t^{j-i};q)_{\lambda_i-\mu_i}} \frac{(q^{\mu_i-\lambda_{j+1}+1}t^{j-i};q)_{\lambda_i-\mu_i}}{(q^{\mu_i-\lambda_{j+1}}t^{j-i+1};q)_{\lambda_i-\mu_i}}.$$

n 変数の場合も, $\mu \in \mathcal{P}_n$, $r = 1, 2, \ldots, n$ に対して $e_r(x)P_\mu(x) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_n,\, |\lambda|-|\mu|=r} \psi'_{\lambda/\mu}(q,t)P_\lambda(x)$ となる.

[M95, §6] では 事実 3.4.2 と対称函数版の特殊値対称性 (c.f. 定理 2.4.2) を同時に示している. [N23, §6.2, §6.3] では特殊値対称性 (定理 2.4.2) の帰結として事実 3.4.2 を導出している.

本稿では以下の補題 3.4.3 と系 3.4.4 だけ示すことにする. まず $\lambda, \mu \in \mathcal{P}_n$ に対して,

- 各 $i = 1, \ldots, n$ に対して $0 \le \lambda_i - \mu_i \le 1$ の時, λ/μ は垂直帯 (vertical strip) である, という.
- 転置 λ', μ' について, λ'/μ' が垂直帯である時, λ/μ は水平帯 (horizontal strip) である, という.

Young 図形で言い換えると, 垂直帯は Young 図形の差 $\lambda \setminus \mu$ (歪 Young 図形) において, (英国流で) 各行に高々一つの箱しかないという条件である. 同様に, 垂直帯は各列に高々一つしか箱がない. 詳細は [M95, Chapter I, §1] 等を参照して欲しい.

補題 3.4.3. $\psi_{\lambda/\mu}(q,t) \neq 0 \iff \lambda/\mu$ が水平帯. $\psi'_{\lambda/\mu}(q,t) \neq 0 \iff \lambda/\mu$ が垂直帯.

特に Pieri 公式の和は, λ/μ が垂直帯である λ だけ取れば良い.

証明. 前半だけ示す. $\psi_{\lambda/\mu}$ の零点は分子二項目 $(q^{\mu_i-\lambda_{j+1}+1}t^{j-i};q)_{\lambda_i-\mu_i}$ の零点, つまり $j = i$ かつ $\mu_i - \lambda_{j+1} + 1 = 0$, つまり $\lambda_{i+1} = \mu_i + 1$. よって零点があるなら $\lambda_i \ge \lambda_{i+1} > \mu_i \ge \mu_{i+1}$ だから, 歪 Young 図形 $\lambda \setminus \mu$ には座標 $(i, \mu_i + 1)$ 及び $(i + 1, \mu_i + 1)$ に箱がある. つまり水平帯ではない. 逆に水平帯でなければ, 適当な $i \le \ell(\mu)$ について, $\lambda \setminus \mu$ の座標 $(i, \mu_i + 1)$ 及び $(i + 1, \mu_i + 1)$ に箱があるから, $\psi_{\lambda/\mu}$ は零点を持つ. □

系 3.4.4 (Schur 多項式の Pieri 公式, [M95, Chapter I, (5.16)])**.** $\mu \in \mathcal{P}$ と $r = 1, 2, \ldots$ に対し,

$$e_r s_\mu = \sum_{\lambda \in \mathcal{P},\, |\lambda|-|\mu|=r,\, \lambda/\mu:\ \text{vertical strip}} s_\lambda.$$

証明. 事実 3.4.2 で $t = q$ とし, 事実 3.3.5 (4) を用いる. □

また, 事実 3.3.5 (5) の対称函数版のノルムの逆数 $b_\lambda(q,t)$ もこの時点で決定できる. 結果だけ紹介すると:

事実 3.4.5 ([M95, Chapter VI, (6.19)])**.** $b_\lambda(q,t) = \langle P_\lambda, P_\lambda \rangle_\infty^{-1} \in \mathbb{F}$ は

$$b_\lambda(q,t) = \prod_{s \in \lambda} \frac{1 - q^{a(s)}t^{l(s)+1}}{1 - q^{a(s)+1}t^{l(s)}}.$$

但し (3.1.2) のように Young 図形の格子点を $s = (i, j) \in \lambda$ としたとき,

$$a(s) = a_\lambda(i, j) := \lambda_i - j + 1, \quad l(s) := a_{\lambda'}(j, i).$$

$a(s)$ を腕の長さ (arm-length), $l(s)$ を脚の長さ (leg-length) と呼ぶ.

特に Schur 対称函数 $s_\lambda \in \Lambda_{\mathbb{F}}$ のノルムの逆数は $b_\lambda(q, q) = 1$ である.

最後に Macdonald 対称多項式のタブロー表示を紹介しよう. まず Young 盤の用語を導入する. 二つの分割 $\lambda, \mu \in \mathcal{P}$ について, λ に対応する Young 図形が μ に対応する Young 図形を含む時, $\lambda \supset \mu$ と書くことにする.

定義 3.4.6 ([M95, Chapter I, §1, p.5])**.** $\lambda \in \mathcal{P}$ を枠とする半標準盤 (semistandard tableau), または column-strict tableau とは,

$$() = \lambda^{(0)} \subset \lambda^{(1)} \subset \cdots \subset \lambda^{(n)} = \lambda$$

を満たす分割の列 $T = (\lambda^{(i)})_{i=0}^n$ であって, 各 $i = 1, 2, \ldots, n$ について $\theta^{(i)} := \lambda^{(i)}/\lambda^{(i-1)}$ が水平帯になっているもののことである. 枠 λ の半標準盤全体がなす集合を $\mathrm{SSTab}(\lambda)$ と書く. そのうち, 長さが n 以下の列からなる部分集合を $\mathrm{SSTab}(\lambda)_n$ と書く.

条件を言い換えると, $i = 1, \ldots, n$ について $\theta^{(i)}$ の箱に数字 i を書き込むと, (英国流で) 各列で上から下に数字が狭義単調増加であり, 各行で右から左に広義単調増加である. そこで, 半標準盤 T を表すのに, 分割の列の代わりに, 枠の Young 図形に数字を書き込んで示すことが多い.

例 3.4.7. $n = 3$, $\lambda = (2, 1)$ なら, $\mathrm{SSTab}((2, 1))_3$ は以下の 8 個の半標準盤からなる.

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 2&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 2&3\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}$$

また $\mathrm{SSTab}((r))_n$ は $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline i_1&i_2&\ &i_r\\\hline\end{array}$ $(1 \le i_1 \le \cdots \le i_r \le n)$ という形の半標準盤からなり, 総数は $\binom{n+r-1}{r-1}$. $\mathrm{SSTab}((1^r))_n$ は $\begin{array}{|c|}\hline i_1\\\hline i_2\\\hline \ \\\hline i_r\\\hline\end{array}$ $(1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n)$ という形の半標準盤からなり, 総数は $\binom{n}{r}$ である.

歪 Young 図形に対する Macdonald 対称函数を導入し, Pieri 公式を繰り返し用いることで, 次の主張が得られる.

事実 3.4.8 (タブロー表示, [M95, Chapter VI, (7.13')])**.** $\lambda \in \mathcal{P}$ と $T = (\lambda^{(i)})_{i=0}^n \in \mathrm{SSTab}(\lambda)$ に対して

$$x^T := x_1^{m_1(T)} x_2^{m_2(T)} \cdots, \quad m_i(T) := \bigl|\{T \text{ に書き込まれている数字 } i \text{ の数 }\}\bigr| \quad (i = 1, \ldots, n),$$

$$\psi_T := \prod_{i=1}^n \psi_{\lambda^{(i)}/\lambda^{(i-1)}}(q, t), \quad \psi_{\lambda/\mu}(q, t) := \prod_{1 \le i \le j \le \ell(\mu)} \frac{(q^{\mu_i - \mu_j} t^{j-i+1}; q)_{\lambda_i - \mu_i}}{(q^{\mu_i - \mu_j + 1} t^{j-i}; q)_{\lambda_i - \mu_i}} \frac{(q^{\mu_i - \lambda_{j+1} + 1} t^{j-i}; q)_{\lambda_i - \mu_i}}{(q^{\mu_i - \lambda_{j+1}} t^{j-i+1}; q)_{\lambda_i - \mu_i}}$$

($\psi_{\mu/\nu}(q, t)$ は事実 3.4.2 で与えたもの) と定めると, Macdonald 対称函数 $P_\lambda \in \Lambda_{\mathbb{F}}$ は次のように展開できる.

$$P_\lambda(x) = \sum_{T \in \mathrm{SSTab}(\lambda)} \psi_T(q, t) x^T.$$

特に $\lambda \in \mathcal{P}_n$ に対して, n 変数 Macdonald 対称多項式のタブロー表示は

$$P_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{T \in \mathrm{SSTab}(\lambda)_n} \psi_T(q, t) x^T.$$

例 3.4.9. $n=2$ 変数の場合に命題 1.3.11 (本質的に Rogers 多項式) をタブロー表示から再導出しよう. $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathcal{P}_2$ に対し, $\mathrm{SSTab}(\lambda)_2$ の元は

1	$\cdots$	1	$\cdots$	1	2	$\cdots$	2
2	$\cdots$	2					

の形の Young 盤, つまり

$$\mathrm{SSTab}(\lambda)_2=\{T=(\lambda^{(0)}=\emptyset\subset\lambda^{(1)}=(m,0)\subset\lambda^{(2)}=\lambda)\mid\lambda_2\le m\le\lambda_1\}.$$

$l:=\lambda_1-\lambda_2$, $i:=m-\lambda_2$ と置こう. Pieri 係数は, $\ell(\lambda^{(0)})=0$ から $\psi_{\lambda^{(1)}/\lambda^{(0)}}=1$, また $\ell(\lambda^{(1)})=1$ から

$$\psi_{\lambda^{(2)}/\lambda^{(1)}}=\frac{(t;q)_{\lambda_1-m}}{(q;q)_{\lambda_1-m}}\frac{(q^{m-\lambda_2}q;q)_{\lambda_1-m}}{(q^{m-\lambda_2}t;q)_{\lambda_1-m}}=\frac{(q^iq;q)_{l-i}}{(q^it;q)_{l-i}}\frac{(t;q)_{l-i}}{(q;q)_{l-i}}=\frac{(q;q)_l}{(t;q)_l}\frac{(t;q)_i}{(q;q)_i}\frac{(t;q)_{l-i}}{(q;q)_{l-i}}.$$

また $x^T=x_1^mx_2^{\lambda_1+\lambda_2-m}=(x_1x_2)^{\lambda_2}x_1^ix_2^{l-i}$. $j:=l-i$ と置くと命題 1.3.11 の表示が得られる.

例 3.4.10. 例 1.3.13 で $n=3$, $\lambda=(2,1)$ の場合に $P_{(2,1)}=m_{(2,1)}+\frac{(1-t)(2+q+t+2qt)}{1-qt^2}m_{(1^3)}$ となることを紹介した. $m_{(1^3)}(x)=x_1x_2x_3$ の係数をタブロー表示から再導出しよう. $\mathrm{SSTab}((2,1))_3$ のうち数字 $1,2,3$ が全て現れる盤は $T=\begin{smallmatrix}1&2\\3&\end{smallmatrix}$ と $S=\begin{smallmatrix}1&3\\2&\end{smallmatrix}$. T については $\psi_T=\psi_{(1)/\emptyset}\psi_{(2)/(1)}\psi_{(2,1)/(2)}$ で,

$$\psi_{(1)/\emptyset}=1,\quad\psi_{(2)/(1)}=\frac{(t;q)_{\lambda_1-\mu_1}}{(q;q)_{\lambda_1-\mu_1}}\frac{(q^{\mu_1-\lambda_2+1};q)_{\lambda_1-\mu_1}}{(q^{\mu_1-\lambda_2}t;q)_{\lambda_1-\mu_1}}=\frac{1-t}{1-q}\frac{1-q^2}{1-qt},\quad\psi_{(2,1)/(2)}=\cdots=1.$$

S については $\psi_S=\psi_{(1)/\emptyset}\psi_{(1^2)/(1)}\psi_{(2,1)/(1^2)}$ で, $\psi_{(1)/\emptyset}=\psi_{(1^2)/(1)}=1$ 及び

$$\psi_{(2,1)/(1^2)}=\frac{(t;q)_{\lambda_1-\mu_1}}{(q;q)_{\lambda_1-\mu_1}}\frac{(q^{\mu_1-\lambda_2}q;q)_{\lambda_1-\mu_1}}{(q^{\mu_1-\lambda_2}t;q)_{\lambda_1-\mu_1}}\frac{(q^{\mu_1-\mu_2}t^2;q)_{\lambda_1-\mu_1}}{(q^{\mu_1-\mu_2}qt;q)_{\lambda_1-\mu_1}}\frac{(q^{\mu_1-\lambda_3}qt;q)_{\lambda_1-\mu_1}}{(q^{\mu_1-\lambda_3}t^2;q)_{\lambda_1-\mu_1}}=\frac{1-t^2}{1-qt}\frac{1-q^2t}{1-qt^2}.$$

よって係数は $\psi_T+\psi_S=\frac{1-t}{1-qt}\bigl((1+q)+\frac{1-q^2t}{1-qt^2}(1+t)\bigr)=\frac{1-t}{1-qt}\frac{(1-qt)(2+q+t+qt)}{1-qt^2}=\frac{(1-t)(2+q+t+2qt)}{1-qt^2}$.

また事実 3.4.8 を $t=q$ と特殊化すれば:

系 3.4.11 (Schur 対称函数のタブロー表示, [M95, Chapter VI, (7.13′)], [岡 06, 定理 9.33])**.**

$$s_\lambda(x)=\sum_{T\in\mathrm{SSTab}(\lambda)_n}x^T.$$

3.5　レポート問題

問題 3.1 (おすすめ問題, [M95, Chapter I, (1.11)]**).** ドミナンス順序 $\le$ に関して, $\mu\le\lambda$ なら $\mu'\ge\lambda'$ であることを示せ.

問題 3.2 ([M95, Chapter I, §2, p.19, Remark 1])**.** 環準同型 (3.1.3) は全射なので, $\bigl((\Lambda_n)_{n\in\mathbb{N}},(\rho_{n,m})_{m\le n}\bigr)$ は可換環の射影系であり, その射影極限として可換環

$$\widehat{\Lambda}:=\varprojlim_n\Lambda_n$$

が得られる. 対称函数環

$$\Lambda=\bigoplus_{d\in\mathbb{N}}\Lambda^d,\quad\Lambda^d=\varprojlim_n\Lambda_n^d$$

は $\widehat{\Lambda}$ の真の部分環であることを示せ.

問題 3.3 ([M95, Chapter I, (2.12)])**.** 冪和対称函数 p_r 達が $\mathbb{Q}$ 上代数独立であること (事実 3.3.1) を示せ.

問題 3.4 ([M95, Chapter VI, (4.4)])**.** Macdonald 対称函数 $P_\lambda(x;q,t) \in \Lambda_{\mathbb{F}}$ について,

$$P_\lambda(x;q,t) = P_\lambda(x;q^{-1},t^{-1})$$

が成立することを, 次の手順で示せ.

(1) 無限変数版 Macdonald 内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\infty,q,t}$ と書くと, 任意の $f, g \in \Lambda_{\mathbb{F}}^d$ に対して

$$\langle f, g \rangle_{\infty,q^{-1},t^{-1}} = (t/q)^d \langle f, g \rangle_{\infty,q,t}$$

となることを示せ [M95, Chapter VI, (2.3)].

(2) 事実 3.3.5 (1) を用いる.

4　GL 型拡大アフィン Hecke 環

[野 97] 及び [N23, Chapter 8] に従って, アフィン Hecke 環の表現による Macdonald 多項式へのアプローチを説明する.

有限変数 $x = (x_1, \ldots, x_n)$ の話に戻る. 従来通り n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ を W と書き, 添字集合 $\mathbb{Z}^n$ を P と書く.

4.1　対称群と A 型ルート系

対称群を A 型ルート系の Weyl 群としてみなし, ルート系の基本事項を速習しよう.

$(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ を n 次元 Euclid 内積空間とし, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ を $\mathbb{R}^n$ の標準基底とする.

$$V \coloneqq \{\textstyle\sum_{i=1}^n a_i\varepsilon_i \mid \sum_{i=1}^n a_i = 0\} \subset \mathbb{R}^n \tag{4.1.1}$$

は $\mathbb{R}^n$ の $n-1$ 次元部分空間で, 内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ の V への制限は, V 上の内積を定める. それを同じ記号で書き, 内積空間 $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ の直交変換群を次のように表す.

$$O(V) = O(V, \langle\cdot,\cdot\rangle) \coloneqq \{f \colon V \to V \mid \text{線形同型かつ } \forall v, w \in V,\ \langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, w\rangle\}.$$

V の部分集合 Φ を

$$\Phi \coloneqq \{\alpha_{ij} \coloneqq \varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 1 \le i \ne j \le n\} \subset V \tag{4.1.2}$$

で定める. $|\Phi| = n(n-1)$ である. また, 次の等式が成立する (問題 4.1).

$$\Phi = \{v \in V \mid \langle v, v\rangle = 2\} \cap \textstyle\sum_{i=1}^n \mathbb{Z}\varepsilon_i. \tag{4.1.3}$$

各 $\alpha \in \Phi$ について, α に垂直な超平面 $H_\alpha \coloneqq \{v \in V \mid \langle\alpha, v\rangle = 0\}$ に関する鏡映変換を $s_\alpha \colon V \to V$ と書きます. 内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ の幾何学的意味[*8]から

$$s_\alpha(v) \coloneqq v - 2\frac{\langle v, \alpha\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle}\alpha \quad (v \in V). \tag{4.1.4}$$

s_α は線形変換であって内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ を保つので $s_\alpha \in O(V)$. また対合的 (involutive), つまり $s_\alpha^2 = \mathrm{id}$ を満たす. 更に $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$ であり, また H_α の元は s_α で動かない. 逆に, そのような $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ の直交変換は s_α と一致する. このことから:

補題 4.1.1. $t \in O(V)$ と $\alpha \in V \setminus \{0\}$ に対し $ts_\alpha t^{-1} = s_{t\alpha}$.

証明. 明らかに $(ts_\alpha t^{-1})(t\alpha) = -t\alpha$. $H_{t\alpha}$ の任意の元 w は, $\langle t^{-1}w, \alpha\rangle = \langle w, t\alpha\rangle = 0$ より, 適当な $v \in H_\alpha$ を用いて $w = tv$ と書ける. すると $(ts_\alpha t^{-1})(w) = (ts_\alpha t^{-1})(tv) = ts_\alpha v = tv = w$. よって $ts_\alpha t^{-1}$ は $H_{t\alpha}$ の元を動かさない. □

集合 Φ は A_{n-1} **型ルート系** (root system of type A_{n-1}) [Hu90, Chap. 1,2] である. 公理を復習すると:

命題 4.1.2. $\Phi \subset V \setminus \{0\}$ は次の性質を満たす.

(R1) 任意の $\alpha \in \Phi$ に対し $\Phi \cap \mathbb{R}\alpha = \{\alpha, -\alpha\}$.

[*8] 高校数学の教科書に書いてある, ベクトルの射影としての解釈.

(R2) 任意の $\alpha \in \Phi$ に対し $s_\alpha(\Phi) = \Phi$.
(R3) 任意の $\alpha, \beta \in \Phi$ に対し $\frac{2\langle\alpha,\beta\rangle}{\langle\beta,\beta\rangle} \in \mathbb{Z}$.

証明. (R1) は定義 (4.1.2) から直接確かめられる．(R3) は, $\alpha = \alpha_{ij}, \beta = \alpha_{kl} \in \Phi$ について, (4.1.3) より $\langle\beta,\beta\rangle = 2$ だから, Kronecker デルタを用いて

$$2\frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\langle\beta,\beta\rangle} = \langle\alpha_{ij}, \alpha_{kl}\rangle = \langle\varepsilon_i - \varepsilon_j, \varepsilon_k - \varepsilon_l\rangle = \delta_{i,k} + \delta_{j,l} - \delta_{i,l} - \delta_{j,k} \in \mathbb{Z}.$$

(R2) については (4.1.3) を用いる．$\alpha = \alpha_{ij} \in \Phi$ について $s_{ij} := s_{\alpha_{ij}}$ と略記すると, $s_{ij} \in O(V)$ より, $\{v \in V \mid \langle v, v\rangle = 2\}$ は s_{ij} の作用で保たれる．一方, (4.1.4) で $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ とすれば $s_\alpha \in O(\mathbb{R}^n)$ とみなせて

$$s_{ij}(\varepsilon_k) = \varepsilon_k - \langle\alpha_{ij}, \varepsilon_k\rangle\,\alpha_{ij} = \varepsilon_k - (\delta_{i,k} - \delta_{j,k})(\varepsilon_i - \varepsilon_j) = \begin{cases} \varepsilon_j & (k = i) \\ \varepsilon_i & (k = j) \\ \varepsilon_k & (k \neq i, j) \end{cases}. \tag{4.1.5}$$

よって $\sum_{i=1}^n \mathbb{Z}\varepsilon_i$ も s_{ij} の作用で保たれる．従って (4.1.3) より $s_\alpha(\Phi) \subset \Phi$．一方で $s_\alpha^2 = \mathrm{id}$ より s_α は全単射. 以上より $s_\alpha(\Phi) = \Phi$. □

直交変換群 $O(V)$ のうち鏡映 s_α 達が生成する部分群を

$$W = W(\Phi) := \langle s_\alpha\ (\alpha \in \Phi)\rangle_{\mathrm{grp}} \subset O(V)$$

と書いて, **ルート系** Φ **の** *Weyl* **群**と呼ぶ.

W の群としての生成元を見つけるために, Φ の部分集合

$$\Delta := \{\alpha_i := \alpha_{i\,i+1} = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} \mid i = 1, \ldots, n-1\} \tag{4.1.6}$$

は線形空間 V の基底であり, Φ の任意の元は Δ の元の整数係数線形結合で書ける．つまり $\Phi \subset \mathbb{Z}\Delta$, $\mathbb{Z}\Delta := \sum_{i=1}^{n-1}\mathbb{Z}\alpha_i \subset V$. Φ のうち, Δ の元の非負整数係数の線形結合で書けるものがなす部分集合を

$$\Pi := \Phi \cap \mathbb{N}\Delta, \quad \mathbb{N}\Delta := \textstyle\sum_{i=1}^{n-1}\mathbb{N}\alpha_i \subset V$$

と表し, また $-\Pi := \{-\alpha \mid \alpha \in \Pi\}$ と置くと, Φ の定義 (4.1.2) から

$$\Pi = \{\alpha_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n-1\}, \quad \Phi = \Pi \sqcup (-\Pi).$$

定義 4.1.3. Δ の元を (Φ の) 単純ルート (simple root), Π の元を (Δ に関する Φ の) 正ルート (positive root), $-\Pi$ の元を負ルート (negative root) と呼ぶ.

補題 4.1.4. 任意の単純ルート $\alpha \in \Delta$ について $s_\alpha(\Pi \setminus \{\alpha\}) = \Pi \setminus \{\alpha\}$.

証明. $\beta \in \Pi \setminus \{\alpha\}$ を $\beta = \sum_{\gamma\in\Delta} c_\gamma \gamma$ と表すと, $\Pi \subset \mathbb{N}\Delta$ と命題 4.1.2 の $\mathbb{R}\alpha \cap \Phi = \{\pm\alpha\}$ より, ある $\gamma_0 \in \Delta \setminus \{\alpha\}$ が存在して $c_{\gamma_0} > 0$．すると $s_\alpha\beta = \beta - c\alpha$ の γ_0 の係数も正で, $\Phi = \Pi \sqcup (-\Pi)$ から, $s_\alpha\beta = \sum_{\gamma\in\Delta} c'_\gamma \gamma$ と書いたときの全ての係数 c'_γ は正．従って $s_\alpha\beta \neq -\alpha$. 以上より任意の $\beta \in \Pi \setminus \{\alpha\}$ は s_α で $\Pi \setminus \{\alpha\}$ の元に写る．すると $s_\alpha^2 = \mathrm{id}$ より, $\Pi \setminus \{\alpha\}$ 上で s_α は全単射である. □

Weyl 群の生成元の話に戻る．$s_\alpha = s_{-\alpha}$ から $W = \langle s_\alpha\ (\alpha \in \Pi)\rangle_{\mathrm{grp}}$. $\alpha_i \in \Delta$ に対応する鏡映を

$$s_i := s_{\alpha_i} \in W \quad (i = 1, \ldots, n-1) \tag{4.1.7}$$

と略記し, **単純鏡映** (simple reflection) と呼ぶ. (4.1.5) から, $\mathbb{R}^{n+1}$ への作用は $s_i(\varepsilon_i) = \varepsilon_{i+1}$, $s_i(\varepsilon_{i+1}) = \varepsilon_i$, $s_i(\varepsilon_j) = \varepsilon_j$ $(j \neq i, i+1)$ である. これは, n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の元 σ の作用

$$\sigma(\textstyle\sum_{j=1}^n c_j \varepsilon_j) \coloneqq \sum_{j=1}^n c_j \varepsilon_{\sigma(j)} = \sum_{j=1}^n c_{\sigma^{-1}(j)} \varepsilon_j, \quad c_j \in \mathbb{R} \quad (1 \le j \le n) \tag{4.1.8}$$

における, 隣接置換 (1.1.2) の場合 $\sigma = (i, i+1)$ と一致する. 更に:

事実 4.1.5 (例えば [Hu90, §1.9])**.** 対応 $s_i \mapsto (i, i+1)$ $(1 \le i \le n-1)$ は群の同型 $W \xrightarrow{\sim} \mathfrak{S}_n$ を定める. 更に, この同型による同一視の下, $\sigma \in W = \mathfrak{S}_n$ の $\mathbb{R}^n$ への作用は (4.1.8) で与えられる.

以下 Weyl 群と対称群を $W = \mathfrak{S}_n$ と同一視し, 単純鏡映 $s_i = s_{\alpha_i}$ と隣接置換 $(i, i+1)$ とを同一視する. 対称群 $\mathfrak{S}_n$ は $\{(i, i+1) \mid i = 1, \ldots, n-1\}$ で生成されるので, W も $\{s_i \mid i = 1, \ldots, n-1\}$ で生成される.

この副節の残りの部分では, Weyl 群 W の長さ関数を復習する.

定義 4.1.6. $w \in W$ の (単純ルート集合 Δ に関する) **長さ** (length) $\ell(w) \in \mathbb{N}$ とは,

$$w = s_{i_1} \cdots s_{i_r}, \quad (i_1, \ldots, i_r \in I_0)$$

と単純鏡映の積で書いたときの r の最小値のこと. そして w の**符号** (sign) $\operatorname{sgn}(w)$ を次で定義する.

$$\operatorname{sgn}(w) \coloneqq (-1)^{\ell(w)}.$$

また, この最小値を与えるような表示 $w = s_{i_1} \cdots s_{i_{\ell(w)}}$ のことを w の**簡約表示** (reduced expression) と呼ぶ.

$\ell(w)$ を正ルート集合 Π に関する量で表すことができる. やはり証明はしない.

事実 4.1.7 (例えば [Hu90, §1.6, §1.7])**.** 各 $w \in W$ に対し

$$\ell(w) = |\Pi(w)|, \quad \Pi(w) \coloneqq \Pi \cap w^{-1}(-\Pi). \tag{4.1.9}$$

右辺の集合 $\Pi(w)$ の組み合わせ論的な意味を考えよう. 正ルート集合は $\Pi = \{\alpha_{ij} = \varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 1 \le i < j \le n\}$ で, 負ルート集合は $-\Pi = \{\alpha_{ji} \mid 1 \le i < j \le n\}$ である. また同一視 $W = \mathfrak{S}_n$ の下で, $\mathbb{R}^n$ への作用は (4.1.8) で与えられるので $w(\alpha_{ij}) = \alpha_{w(i)w(j)}$. 従って

$$\Pi(w) = \{\alpha_{ij} \in \Pi \mid \alpha_{w(i)w(j)} \in -\Pi\} = \{(i,j) \in I^2 \mid i < j \text{ かつ } w(i) > w(j)\}.$$

つまり, $|\Pi(w)|$ は置換 $w \in \mathfrak{S}_n$ の**転倒数** (inversion number) である.

4.2 q 差分鏡映作用素環

k をパラメータ q を含む体とする. $x = (x_1, \ldots, x_n)$ を変数とする k 係数の Laurent 多項式環及び有理函数体 $k[x^{\pm 1}] \subset k(x)$ を考える. 有理函数 $f \in k(x)$ を左掛算作用素 $k(x) \to k(x)$, $g \mapsto fg$ とみなすことで, $k(x)$ は非可換 k 代数 $\operatorname{End}_k k(x)$ の可換部分 k 代数と思える.

q シフト作用素を $\tau_i = T_{q,x_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ と書き, $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in P = \mathbb{Z}^n$ に対して $\tau^\mu \coloneqq \tau_1^{\mu_1} \cdots \tau_n^{\mu_n}$ と略記する. 定数係数の q 差分作用素全体がなす集合 $k[\tau^{\pm 1}] \coloneqq \left\{\sum_{\mu \in P} a_\mu \tau^\mu \;\middle|\; a_\mu \in k\right\}$ は変数 $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$ の Laurent 多項式の集合であり, 作用素の合成によって環になり, $\operatorname{End}_k k(x)$ の可換部分 k 代数である.

これら二つの可換部分環 $k(x), k[\tau^{\pm 1}] \subset \operatorname{End}_k k(x)$ が生成する部分環 $\mathcal{D}_{q,x} \subset \operatorname{End}_k k(x)$ は, 有理函数係数の q 差分作用素全体と一致する:

$$\mathcal{D}_{q,x} = k(x)[\tau^{\pm 1}] := \left\{ \textstyle\sum_{\mu \in P} a_\mu(x) \tau^\mu \mid a_\mu(x) \in k(x) \right\}. \tag{4.2.1}$$

$\mathcal{D}_{q,x}$ を q 差分作用素環と呼ぼう. 有理函数 $f = f(x) \in k(x)$ と τ^μ $(\mu \in P)$ の関係式は

$$\tau_\mu f = (\tau_\mu f)\tau_\mu, \quad (\tau_\mu f)(x) := f(q^{\mu_1} x_1, \ldots, q^{\mu_n} x_n). \tag{4.2.2}$$

次に, 対称群 $W = \mathfrak{S}_n$ は (1.1.4) によって $k(x)$ に作用するから, k 係数の群環

$$k[W] := \left\{ \textstyle\sum_{w \in W} a_w w \mid a_w \in k \right\},$$
$$\left(\textstyle\sum_{w \in W} a_w w\right) \cdot \left(\textstyle\sum_{w \in W} b_w w\right) := \textstyle\sum_{w \in W} \left(\textstyle\sum_{w', w'' \in W,\, w'w''=w} a_{w'} b_{w''}\right) w$$

も $\operatorname{End}_k k(x)$ の部分 k 代数と思える. これは ($n \geq 2$ なら) 非可換環であることに注意する. $\mathcal{D}_{q,x}$ と $k[W]$ が生成する $\operatorname{End}_k k(x)$ の部分環は

$$\mathcal{D}_{q,x}[W] \equiv \mathcal{D}_{q,x}[W]_k := \left\{ \textstyle\sum_{\mu \in P,\, w \in W} a_{\mu,w}(x) \tau^\mu w \mid a_{\mu,w}(x) \in k(x) \right\} \tag{4.2.3}$$

と一致する. この $\mathcal{D}_{q,x}[W]$ を q 差分鏡映作用素環 (ring of q-difference-reflection operators) と呼ぶ. この環の非可換な関係式は, (4.2.2) と W の関係式 (1.1.3) 及び

$$w\tau^\mu = \tau^{w.\mu} w, \quad wf = (w.f)w \quad (w \in W,\, \mu \in P,\, f = f(x) \in k(x)) \tag{4.2.4}$$

である. 但し (1.2.2) の作用 (を $\mathbb{N}^n$ から $P = \mathbb{Z}^n$ へ自然に拡張した) $W \curvearrowright P$ と (1.1.4) の作用 (を自然に拡張した) $W \curvearrowright k(x)$ を . で表した.

$\mathcal{D}_{q,x}[W]$ の構造は次のように言い換えられる. $\tau^P := \{\tau^\mu \mid \mu \in P\}$ を q シフト作用素 (並進作用素) のなす群としよう. 抽象群としては, τ^P は可換群 $P = \mathbb{Z}^n$ と "指数写像" $\mu \mapsto \tau^\mu$ によって同型である.

定義 4.2.1. 次の半直積群 $\widetilde{W}$ を GL 型拡大アフィン Weyl 群 (extended affine Weyl group) と呼ぶ.

$$\widetilde{W} \equiv \widetilde{W}^{\mathrm{GL}_n} := \tau^P \rtimes W = \{\tau^\mu w \mid \mu \in P,\, w \in W\}, \quad w\tau^\mu = \tau^{w.\mu} w. \tag{4.2.5}$$

(4.2.5) の関係式と作用 (4.2.4) が整合的なので, $k(x)$ への τ^P と W の作用から $\widetilde{W}$ の忠実作用が定まる. つまり k 係数の群環 $k[\widetilde{W}]$ は $\operatorname{End}_k k(x)$ の部分環と思える. すると, q 差分鏡映作用素環 $\mathcal{D}_{q,x}[W]$ は $k(x)$ と $k[\widetilde{W}]$ が生成する $\operatorname{End}_k k(x)$ の部分環と一致する:

$$\mathcal{D}_{q,x}[W] = \left\langle k(x), k[\widetilde{W}] \right\rangle_{k\text{-alg}} \subset \operatorname{End}_k k(x). \tag{4.2.6}$$

4.3　拡大アフィン Weyl 群の構造

定義 4.2.1 の拡大アフィン Weyl 群 $\widetilde{W} = \langle W, \tau^P \rangle_{\mathrm{grp}}$ の構造を詳しく観察しよう. まず, $W = \mathfrak{S}_n$ の生成系である (4.1.7) の単純鏡映 $s_1, \ldots, s_{n-1}$ に加え, 互換 $(1, n) \in W$ と巡回置換 $(n-1, n-2, \ldots, 1) \in W$ 及び並進作用素 $\tau_i \in \tau^P$ を使って

$$s_0 := \tau_1^{-1} \tau_n (1, n), \quad \omega := \tau_n (n-1, \ldots, 1) \in \widetilde{W}$$

と定め, s_0 をアフィン鏡映 (affine reflection), ω を Dynkin 自己同型と呼ぶ. $\mathbb{F}(x)$ への作用は

$$\begin{aligned} s_0(x_1) &= qx_n, \quad s_0(x_i) = x_i \ (i = 2, \ldots, n-1), \quad s_0(x_n) = q^{-1}x_1, \\ \omega(x_1) &= qx_n, \quad \omega(x_i) = x_{i-1} \ (i = 2, \ldots, n). \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

実は, 抽象群として $\widetilde{W}$ は次の表示を持つことが知られている (変種については問題 4.3).

事実 4.3.1. 群 $\widetilde{W}$ は次の表示を持つ.

$$\begin{aligned} &\widetilde{W} = \langle s_0, \ldots, s_{n-1}, \omega \mid (0), (1), (2), (3) \rangle_{\mathrm{grp}}. \\ &(0) \quad s_i^2 = 1 \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1). \\ &(1) \quad s_i s_j = s_j s_i \qquad (j \not\equiv i, i \pm 1 \bmod n). \\ &(2) \quad s_i s_j s_i = s_j s_i s_j \qquad (j \equiv i, i \pm 1 \bmod n). \\ &(3) \quad \omega s_i = s_{i-1}\omega \qquad (i \bmod n \text{ で読む}). \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

また, τ_i 達はこれらの生成元を使って次のように書ける (後で必要になる為, 右辺で逆元を取っている).

$$\tau_1 = s_1 \cdots s_{n-1}\omega, \quad \tau_2 = s_2 \cdots s_{n-1}\omega s_1^{-1}, \quad \cdots, \quad \tau_n = \omega s_1^{-1} \cdots s_{n-1}^{-1}. \tag{4.3.3}$$

このことと関係して, 次の事実を紹介する.

事実 4.3.2 (c.f. [M03, §3.1, §3.2])**.** GL 型**拡大アフィン組紐群** (extended affine braid group) $\widetilde{B}$ を, (4.3.2) を使って

$$\widetilde{B} := \langle s_0, \ldots, s_{n-1}, \omega \mid (1), (2), (3) \rangle_{\mathrm{grp}}$$

で定義し, その元 $\tau_1, \ldots, \tau_n$ を (4.3.3) の右辺で定義する. また, $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in P = \mathbb{Z}^n$ に対し

$$\tau^\mu := \tau_1^{\mu_1} \cdots \tau_n^{\mu_n}$$

で定義する. この時,

(1) $\mu, \nu \in P$ に対して $\tau^\mu \tau^\nu = \tau^{\mu+\nu}$ が成立する. 特に $\{\tau^\mu \mid \mu \in P\} \subset \widetilde{B}$ は可換部分群で, P と同型.

(2) $P = \mathbb{Z}^n$ 上の対称双線形形式 $\langle \mu, \nu \rangle := \sum_{i=1}^n \mu_i \nu_i$ について, $\mu \in P$ と $\alpha_i := \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ ($i = 1, \ldots, n-1$, (4.1.2) 参照) が $\langle \mu, \alpha_i \rangle = 1$ を満たす時,

$$s_i \tau^{\mu - \alpha_i} s_i = \tau^\mu. \tag{4.3.4}$$

(3) $\mu \in P$ と $\alpha_i := \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ ($i = 1, \ldots, n-1$) が $\langle \mu, \alpha_i \rangle = 0$ を満たす時,

$$s_i \tau^\mu = \tau^\mu s_i. \tag{4.3.5}$$

$\widetilde{W}$ は $\widetilde{B}$ を (4.3.2) (0) の二次関係式 $(s_i - 1)(s_i + 1)$ で割ったものである.

証明. (1) の $\tau_1\tau_2 = \tau_2\tau_1$ だけ証明する. まず次の関係式に注意する (証明は問題 4.2):

$$s_i \tau_{i+1} s_i = \tau_i, \quad s_i \tau_j = \tau_j s_i \quad (i = 1, \ldots, n, \ j \neq i, i+1)$$

すると

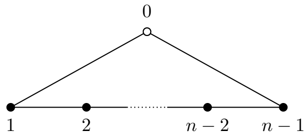
$$\begin{aligned} \tau_1\tau_2 &= \tau_1 \cdot s_2 \cdots s_{n-1} \cdot \omega s_1^{-1} = s_2 \cdots s_{n-1} \cdot \tau_1 \cdot \omega s_1^{-1} = s_2 \cdots s_{n-1} \cdot s_1 \cdots s_{n-2} s_{n-1}\omega \cdot \omega s_1^{-1} \\ &= s_2 \cdots s_{n-1} \cdot \omega s_2 \cdots s_{n-1} s_0 \cdot \omega s_1^{-1} = s_2 \cdots s_{n-1} \cdot \omega s_2 \cdots s_{n-1} s_0 \cdot s_0^{-1}\omega \\ &= s_2 \cdots s_{n-1}\omega s_1^{-1} \cdot s_1 s_2 \cdots s_{n-1}\omega = \tau_2\tau_1. \end{aligned}$$

□

次に, s_i 達が生成する $\widetilde{W}$ の部分群に注目すると, それは A 型アフィン Weyl 群

$$W_{\mathrm{aff}} \equiv W_{\mathrm{aff}}^{\mathrm{A}_{n-1}} := \langle s_0, \ldots, s_{n-1} \mid (0), (1), (2) \rangle_{\mathrm{grp}}$$

と同型である. W_{aff} は Coxeter 群 [Hu90, Chapter 4] であり, 頂点 $0, \ldots, n-1$ の A 型アフィン Dynkin 図形



に対応した Coxeter グラフから定まる実鏡映群である. 特に頂点 i が生成元 (単純鏡映) s_i に対応する. 上のアフィン Dynkin 図形においての直線部分は A 型 Dynkin 図形で, 対応する Coxeter 群が A 型 Weyl 群, 即ち対称群 $W = \mathfrak{S}_n$ である. 関係式 (3) から, ω はアフィン Dynkin 図形の頂点番号を反時計回りに一つずらす, つまりグラフの自己同型の生成元と思える. これが "Dynkin 自己同型" という ω の名前の由来である. また, このことから半直積としての $\widetilde{W}$ の表示が得られる:

$$\widetilde{W} = W_{\mathrm{aff}} \rtimes \Omega, \quad \Omega := \langle \omega \rangle_{\mathrm{grp}}, \quad \omega s_i = s_{i-1}\omega \quad (i \bmod n \text{ で読む}).$$

Ω は ω が生成する無限巡回群[*9]である.

今までに現れた群をまとめて表示しておこう.

$$W \subset W_{\mathrm{aff}} \subset \widetilde{W} = W_{\mathrm{aff}} \rtimes \Omega = W \ltimes \tau^P \supset \tau^P. \tag{4.3.6}$$

4.4 拡大アフィン Hecke 環と Lusztig 関係式

Coxeter 群の群環の変形として岩堀 Hecke 環が知られている. Coxeter 群としてアフィン Weyl 群を取った岩堀 Hecke 環をアフィン Hecke 環と呼ぶ. Macdonald 対称多項式と関係するのは, A 型アフィン Hecke 環 $H(W_{\mathrm{aff}})$ を拡大した環 $H(\widetilde{W})$ とその q 差分鏡映作用素による実現である. それを紹介しよう.

定義 4.4.1. k を, パラメータ t の平方根 $t^{1/2}$ を含んだ体とする. 次の k 代数 $H(\widetilde{W})$ を GL 型拡大アフィン Hecke 環と呼ぶ.

$$\begin{aligned} &H(\widetilde{W}) \equiv H(\widetilde{W}^{\mathrm{GL}_n}) := \bigl\langle T_0, \ldots, T_{n-1}, \omega^{\pm 1} \mid (0), (1), (2), (3) \bigr\rangle_{k\text{-alg}}. \\ &\begin{array}{lll} (0) & (T_i - t^{1/2})(T_i + t^{-1/2}) = 0 & (i = 0, 1, \ldots, n-1). \\ (1) & T_i T_j = T_j T_i & (j \not\equiv i, i \pm 1 \bmod n). \\ (2) & T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1} & (i \bmod n \text{ で読む}). \\ (3) & \omega T_i = T_{i-1}\omega,\ \omega\omega^{-1} = \omega^{-1}\omega = 1 & (i \bmod n \text{ で読む}). \end{array} \end{aligned} \tag{4.4.1}$$

二次関係式 (0)[*10] を Hecke 関係式と呼ぶ.

事実 4.3.2 と比較すると, $H(\widetilde{W})$ は拡大アフィン組紐群の k 係数群環 $k[\widetilde{B}]$ を (4.4.1) (0) の二次関係式で割ったものである. また, (4.4.1) と拡大アフィン Weyl 群 $\widetilde{W}$ の基本関係式 (4.3.2) とを比較すると, $H(\widetilde{W})$ は $\widetilde{W}$ の二次関係式 $(s_i - 1)(s_i + 1) = 0$ を "t 変形" したものであり, $t \to 1$ とすれば群環 $k[\widetilde{W}]$ と一致する.

[*9] 代わりにアフィン Dynkin 図形の自己同型群 $\Omega' := \langle \omega' \mid (\omega')^n \rangle_{\mathrm{grp}}$ を考えると, A_n 型拡大アフィン Weyl 群 $\widetilde{W}(\mathrm{A}_n) = W_{\mathrm{aff}} \rtimes \Omega'$ が得られます. 対応する Macdonald 多項式が A_n 型 Macdonald 多項式で, 特に $n = 1$ とすると注意 1.3.12 の Rogers 多項式になります.

[*10] [N23, Theorem 8.1 (0)] に誤植があって, 右辺は 1 でなく 0 です.

Hecke 関係式 (0) から, 生成元 $T_i \in H(\widetilde{W})$ は可逆である:

$$T_i^{-1} = T_i - (t^{1/2} - t^{-1/2}). \tag{4.4.2}$$

また, 群の列 (4.3.6) の類似として, 以下の環の列がある.

$$H(W) \subset H(W_{\mathrm{aff}}) \subset H(\widetilde{W}) = H(W_{\mathrm{aff}} \rtimes \Omega) = H(W \ltimes \tau^P) \supset k[\tau^P]. \tag{4.4.3}$$

但し $H(W) := \langle s_1, \ldots, s_{n-1} \rangle_{k\text{-alg}}$ は $W = \mathfrak{S}_n$ の岩堀 Hecke 環, $H(W_{\mathrm{aff}}) := \langle s_0, \ldots, s_{n-1} \rangle_{k\text{-alg}}$ は冒頭で触れた A 型アフィン Hecke 環であり, $k[\tau^P]$ は可換群 τ^P の k 係数群環である.

次に $H(\widetilde{W})$ の基底を一つ上げよう. $W = \mathfrak{S}_n$ の場合 (定義 4.1.6) と同様に, Coxeter 群である A 型アフィン Hecke 環 W_{aff} の元 w' を生成元で

$$w' = s_{i_1} \cdots s_{i_l} \quad (i_1, \ldots, i_l \in \{0, \ldots, n-1\})$$

と表示した時, l が最小値になるような表示を w' の簡約表示と呼ぶ. $\widetilde{W}$ は半直積 $W_{\mathrm{aff}} \rtimes \Omega$ だから, 任意の元 $w \in \widetilde{W}$ は $w = w'\omega^r$ ($w' \in W_{\mathrm{aff}}$, $j \in \mathbb{Z}$) と一意に表せる. この時, 更に $w' \in W_{\mathrm{aff}}$ を簡約表示して,

$$w = s_{i_1} \cdots s_{i_l} \omega^j$$

と表示したものを, $w \in \widetilde{W}$ の簡約表示と呼ぶ.

事実 4.4.2 (c.f. [M03, (4.1.3)])**.** $w \in \widetilde{W}$ の簡約表示 $w = s_{i_1} \cdots s_{i_l} \omega^j$ ($i_k \in \{0, \ldots, n-1\}$, $j \in \mathbb{Z}$) を一つとり,

$$T(w) := T_{i_1} \cdots T_{i_l} \omega^j \in H(\widetilde{W})$$

とすると, これは簡約表示の取り方によらない元を定める. 更に $\{T(w) \mid w \in \widetilde{W}\}$ は $H(\widetilde{W})$ の k 基底である.

次に, $H(\widetilde{W})$ の可換部分環を構成しよう. この構成が拡大アフィン Hecke 環と Macdonald 対称多項式との関係の鍵になる. 事実 4.3.2 で紹介した, 拡大アフィン組紐群 $\widetilde{B}$ の元 $\tau^\mu = \tau_1^{\mu_1} \cdots \tau_n^{\mu_n}$ ($\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in P = \mathbb{Z}^n$) を思い出してほしい. $H(\widetilde{W})$ は $k[\widetilde{B}]$ の商だから, 環の全射準同型 $k[\widetilde{B}] \twoheadrightarrow H(\widetilde{W})$ がある.

定義 4.4.3. 各 $\mu \in P$ に対し, 商 $k[\widetilde{B}] \twoheadrightarrow H(\widetilde{W})$ による $y^\mu \in k[\widetilde{B}]$ ($\mu \in P$) の像を $Y^\mu \in H(\widetilde{W})$ と書く.

$\tau_i \in \widetilde{B}$ の定義 (4.3.3) から, $Y_i \in H(\widetilde{W})$ は次を満たす.

$$Y_1 = T_1 \cdots T_{n-1}\omega, \quad Y_2 = T_2 \cdots T_{n-1}\omega T_1^{-1}, \quad \cdots, \quad Y_n = \omega T_1^{-1} \cdots T_{n-1}^{-1}.$$

$\widetilde{B}$ において τ^μ 達は可換だったから, 商 $H(\widetilde{W})$ においても Y^μ 達も可換である:

$$Y^\mu Y^\nu = Y^\nu Y^\mu \in H(\widetilde{W}) \quad (\mu, \nu \in P).$$

特に $Y_1^{\pm 1}, \ldots, Y_n^{\pm 1}$ は可換部分環 $\widetilde{\mathbb{F}}[Y^{\pm 1}] \subset H(\widetilde{W})$ を生成する.

次に, Y^μ と T_i の関係式を記述する Lusztig 関係式を紹介しよう. §4.1 で導入した A 型ルート系の記号, 特に (4.1.1) の標準基底 $\varepsilon_i := (0, \ldots, 1, \ldots, 0) \in P = \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ (i 番目が 1 で他は 0) と (4.1.6) の単純ルート $\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$, 及び単純鏡映 $s_i = s_{\alpha_i}$ を思い出してほしい.

命題 4.4.4 (Lusztig 関係式, c.f. [M03, §4.2, (4.2.4)]). $\mu \in P$ と $i = 1, \dots, n-1$ に対して, 次の関係式が $H(\widetilde{W})$ において[*11]成立する.

$$Y^\mu T_i - T_i Y^{s_i.\mu} = b(Y^{-\alpha_i})(Y^\mu - Y^{s_i.\mu}), \quad b(z) := \frac{t^{1/2} - t^{-1/2}}{1-z}.$$

証明. まず $\mu = \varepsilon_j \in P$ の場合を示そう. 事実 4.3.2 における Y^μ の定め方から, $Y^{\varepsilon_j} = T_j \in H(\widetilde{W})$ となる. 事実 4.3.2 で定めた P 上の双線形形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を用いる.

- $j \neq i, i+1$ なら $\langle \varepsilon_j, \alpha_i \rangle = 0$ 及び $s_i.\varepsilon_j = \varepsilon_j$. 左辺は $Y^{\varepsilon_i} T_i - T_i Y^{\varepsilon_i}$ で, 事実 4.3.2 (4.3.5) から 0 となり, 右辺と等しい.
- $j = i$ なら $s_i.\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1}$ だから左辺は $Y^{\varepsilon_i} T_i - T_i Y^{\varepsilon_{i+1}}$. (4.3.5) から $T_i Y^{\varepsilon_{i+1}} T_i = Y^{\varepsilon_i}$ なので, (4.4.2) と合わせて, 左辺は

$$Y^{\varepsilon_i} T_i - Y^{\varepsilon_i} T_i^{-1} = (t^{1/2} - t^{-1/2}) Y^{\varepsilon_i}.$$

一方で右辺は

$$\frac{t^{1/2} - t^{-1/2}}{1 - Y^{\varepsilon_{i+1}}/Y^{\varepsilon_i}} (Y^{\varepsilon_i} - Y^{\varepsilon_{i+1}}) = (t^{1/2} - t^{-1/2}) Y^{\varepsilon_i}.$$

$\mu, \nu \in P$ について関係式が成立すれば, $\mu + \nu$ 及び $-\mu$ についても関係式が成立する. これから, $\mu = \varepsilon_{j+1}$ の場合を含めて, すべての $\mu \in P$ について関係式が成立する. □

この関係式と事実 4.4.2 から, $H(\widetilde{W})$ の別の基底が得られる. また (4.4.3) の $H(\widetilde{W}) = H(W \ltimes \tau^P)$ は, 次の意味で $H(W) \ltimes k[\tau^P]$ と等しい.

系 4.4.5 (c.f. [M03, (4.2.7)]). $\{Y^\mu T(w) \mid w \in W, \mu \in P\}$ 及び $\{T(w) Y^\mu \mid w \in W, \mu \in P\}$ は $H(\widetilde{W})$ の基底である. また, $H(\widetilde{W})$ の生成元として次の二種類が取れる.

$$H(\widetilde{W}) = \langle T_0, \dots, T_{n-1}, \omega^{\pm 1} \rangle_{k\text{-alg}} = \langle T_1, \dots, T_{n-1}, Y_1, \dots, Y_n \rangle_{k\text{-alg}}.$$

更に, 系 4.4.5 の基底を使うことで, 拡大アフィン Hecke 環 $H(\widetilde{W})$ の中心が決定できる.

定理 4.4.6 (J. Bernstein (unpublished), [N23, Theorem 8.3], c.f. [M03, (4.2.10)]). $H(\widetilde{W})$ の中心

$$Z := \{\zeta \in H(\widetilde{W}) \mid \zeta a = a \zeta \ \forall a \in H(\widetilde{W})\}$$

は $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ の対称 Laurent 多項式環である:

$$Z = \widetilde{\mathbb{F}}[Y^{\pm 1}]^W := \{f(Y) \mid f(z) \in \widetilde{\mathbb{F}}[z^{\pm 1}]^W\}.$$

4.5　拡大アフィン Hecke 環の基本表現

次に基本表現を説明しよう. Lusztig は [L89] において, アフィン Hecke 環を q 差分鏡映作用素で実現した. 対応する表現をアフィン Hecke 環の基本表現と呼ぶ. GL 型拡大アフィン Hecke 環も (4.2.3) の q 差分鏡

[*11] 右辺に Y_i の有理式が現れているが, 実際は多項式になって, 右辺は $H(\widetilde{W})$ の元である, という意味.

映作用素環 $\mathcal{D}_{q,t}[W] \subset \operatorname{End}_k k(x)$ の部分環として実現できる．そのことを説明しよう．記号の簡略化の為に，Laurent 多項式環 $k[x^{\pm 1}]$ を次のように略記する．

$$A := k[x^{\pm 1}].$$

まず誘導による $H(\widetilde{W})$ の表現の構成を考えよう．$W = \mathfrak{S}_n$ の Hecke 環 $H(W)$ は $H(\widetilde{W})$ の部分環であった．今後，$H(W)$ を有限 Hecke 環と呼ぼう．$H(W)$ の上の左加群 M に対し，誘導によって左 $H(W)$ 加群

$$\operatorname{ind}_{H(W)}^{H(\widetilde{W})} M := H(\widetilde{W}) \otimes_{H(W)} M$$

を得る．系 4.4.5 の k 線形同型 $H(\widetilde{W}) \cong A \otimes_k H(W)$, $Y^\mu T(w) \mapsto x^\mu \otimes T(w)$ から，誘導加群についても

$$H(\widetilde{W}) \otimes_{H(W)} M \cong A \otimes_k M, \quad f(Y)T(w) \otimes m \longmapsto f \otimes T(w)m \quad (f \in A,\, w \in W,\, m \in M).$$

という k 線形同型がある．Lusztig 関係式 (命題 4.4.4) から

$$f(Y)T_i - T_i(s_i f)(Y) = b(Y^{\varepsilon_{i+1}-\varepsilon_i})(f(Y) - (s_i Y)(Y) \quad (f \in A,\, i = 1, \ldots, n)$$

なので，有限 Hecke 環 $H(W) = \langle T_1, \ldots, T_{n-1} \rangle_{k\text{-alg}}$ の誘導加群への作用は次のようになる．

$$T_i(f \otimes m) = s_i f \otimes T_i m + (f - s_i f) b(x_{i+1}/x_i) \otimes m.$$

特に M が 1 次元 $H(W)$ 加群 $M = km$, $T_i m = t^{1/2} m$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ の場合，誘導加群は $A = k[x^{\pm 1}]$ であり，有限 Hecke 環の作用 $\pi' \colon H(W) \to \operatorname{End}_k A$ は次で与えられる．

$$\pi'(T_i) = t^{1/2} s_i + b(x_{i+1}/x_i)(1 - s_i) \quad (i = 1, \ldots, n-1). \tag{4.5.1}$$

以上の議論で得られた $A = k[x^{\pm 1}]$ への $T_1, \ldots, T_n$ の作用に，T_0 及び Y^μ $(\mu \in P)$ の作用を加えて $H(\widetilde{W})$ 加群としたのが基本表現である．結果を述べるため，命題 4.4.4 の $b(z)$ に加えてもう一つ有理函数を用意する:

補題 4.5.1． 有理函数

$$b(z) := \frac{t^{1/2} - t^{-1/2}}{1 - z}, \quad c(z) := \frac{t^{-1/2} - t^{1/2} z}{1 - z} \tag{4.5.2}$$

は以下の関係式を満たす．

(1) $c(z) = t^{1/2} - b(z) = t^{-1/2} + b(z^{-1})$.

(2) $c(z) + c(z^{-1}) = t^{1/2} + t^{-1/2}$.

(3) $b(z) + b(z^{-1}) = t^{1/2} - t^{-1/2}$.

(4) $c(z)c(z^{-1}) = 1 + b(z)b(z^{-1})$.

関係式の証明は略す．

基本表現の定義を大雑把に説明すると，T_0 を q 差分鏡映作用素として実現し，Y^μ は (4.3.1) の ω の作用と $T_0, \ldots, T_n$ から実現する．以下，係数体 k として $\widetilde{\mathbb{F}} := \mathbb{Q}(q, t^{1/2})$ を考える．また § 4.1 のルート系 $\Phi = \{\alpha_{ij} = \varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 1 \le i \neq j \le n\}$ 及び $\alpha_i = \alpha_{ii+1}$, $s_{\alpha_i} = s_i$ を思い出す．$x^{\alpha_{ij}} = x_{\varepsilon_i - \varepsilon_j} := x_i/x_j$ と置く．

定理 4.5.2 ([N23, Theorem 8.1], c.f. [M03, (4.3.10)])**．** $\widetilde{\mathbb{F}} := \mathbb{Q}(q, t^{1/2})$ とする．(4.5.2) の $\widetilde{\mathbb{F}}$ 係数の有理函数 $b(z), c(z)$ を用いて，各 $i = 1, \ldots, n-1$ について $T_i \in H(\widetilde{W})$ を $\widetilde{\mathbb{F}}(x)$ 上の作用素

$$T_i \longmapsto c(x^{\alpha_i}) s_i + b(x^{\alpha_i}), \quad s_i(x_j) = x_{s_i(j)} \quad (j = 1, \ldots, n)$$

と対応させ ((1.1.4), (4.3.1) 参照), また $\omega \in H(\widetilde{W})$ を作用素

$$\omega(x_1) = qx_n, \quad \omega(x_i) = x_{i-1} \quad (i = 2, \dots, n)$$

と対応させる ((4.3.1) 参照). 以上の生成元の対応により, 環の単射準同型

$$\pi = \pi_{q,t} \colon H(\widetilde{W}) \longrightarrow \mathcal{D}_{q,t}[W] \subset \operatorname{End}_{\widetilde{\mathbb{F}}} \widetilde{\mathbb{F}}(x)$$

が定まる. 更に, π は Laurent 多項式環 $A := \widetilde{\mathbb{F}}[x^{\pm 1}]$ を保つ. すなわち

$$\pi \colon H(\widetilde{W}) \hookrightarrow \operatorname{End}_{\widetilde{\mathbb{F}}} A.$$

π を $H(\widetilde{W})$ の基本表現と呼ぶ. また (4.5.2) の q 差分鏡映作用素 $c(X_i)s_i + b_i(X_i)$ を Demazure-Lusztig 作用素と呼ぶ.

証明の概略だけ説明しよう.

- 対応が環準同型 π を定めること, つまり対応先の q 差分鏡映作用素が $H(\widetilde{W})$ の基本関係式 (4.4.1) を満たすことの証明について.
  - $T_1, \dots, T_n$ の対応先については, (4.5.2) が (4.5.1) の有限 Hecke 環の表現 π' と一致することが補題 4.5.1 から分かるので, 基本関係式 (0)–(3) を満たしている.
  - ω の対応先については, (4.3.1) から関係式 (3) が直接確かめられる.
  - 非自明なのは T_0 の関係式 (0)–(3) であるが, 階数 2 の有限 Hecke 環 $H(\mathfrak{S}_3)$ について成立していることから, 自動的に従う. 尚, Hecke 関係式 (0) は直接確かめることもできる (問題 4.4 も参照).
- 次に π が $\operatorname{End}_{\mathbb{F}} A$ への単射, つまり忠実表現であることの証明 (c.f. [M03, (4.3.11)]) について. より強く, A 上の作用素の族 $\{x^{\mu}\pi(T(w)) \mid \mu \in P,\, w \in \widetilde{W}\}$ が $\widetilde{\mathbb{F}}$ 上線形独立であることが, $\widetilde{W}$ 上の Bruhat 順序 (c.f. [M03, §2.3]) を使って示せる.

4.6 q-Dunkl 作用素と Macdonald-Ruijsenaars 作用素

拡大アフィン Hecke 環 $H(\widetilde{W})$ の中心 Z が, $Y_1, \dots, Y_n$ (定義 4.4.3) の対称 Laurent 多項式環であったことを思い出そう (定理 4.4.6).

定義 4.6.1. 基本表現 π による $Y_1, \dots, Y_n$ の像, ないし対称 Laurent 多項式 $f(Y) = f(Y_1, \dots, Y_n) \in Z$ の像を q-Dunkl 作用素と呼ぶ.

対称多項式環は基本対称式の多項式環であった: $\mathbb{Z}[x]^W = \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]^{S_n} = \mathbb{Z}[e_1(x), \dots, e_n(x)]$ (事実 1.1.2). このことと $e_n(x) = x_1 \cdots x_n$ より, 対称 Laurent 多項式環は

$$\mathbb{Z}[x^{\pm 1}]^W = \mathbb{Z}[e_1(x), \dots, e_n(x), e_n(x)^{-1}].$$

実は:

定理 4.6.2. q-Dunkl 作用素 $e_r(x)$ は r 階 Macdonald-Ruijsenaars q 差分作用素と本質的に等しい:

$$\pi(e_r(Y)) = t^{-r(n-1)/2} D_x^{(r)}, \quad D_x^{(r)} := \sum_{|I|=r} A_I(x) T_{q,x}^I, \quad A_I(x) := t^{\binom{|I|}{2}} \prod_{i \in I,\, j \notin I} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j}.$$

従って基本表現 π によって, $H(\widetilde{W})$ の中心 Z に関する次の環同型が成立する.

$$Z \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathbb{F}}[D_x^{(1)}, \dots, D_x^{(r)}, (D_x^{(r)})^{-1}]$$

特に作用素 $D_x^{(r)}$ 達は可換である (定理 2.2.1).

証明の前に系を一つ紹介しよう. Macdonald 対称多項式 $P_\lambda(x)$ $(x \in \mathcal{P}_n)$ は $D_x^{(r)}$ の固有函数で, 固有値は $e_r(q^\lambda t^\delta)$ であった (定理 2.2.2). 従って:

系 4.6.3. 任意の n 変数対称 Laurent 多項式 $f(z) = f(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{F}[z^{\pm 1}]^W$ に対し,

$$f(D) = f(D_x^{(1)}, \dots, D_x^{(n)}) = \pi(f(Y)) \in D_{q,x}[W]_{\mathbb{F}}$$

は n 変数 Macdonald 対称多項式 $P_\lambda(x) \in \Lambda_{n,\mathbb{F}}$ を固有函数に持つ.

$$f(D)P_\lambda(x) = f(q^\lambda t^\rho)P_\lambda(x), \quad \rho := \delta - \tfrac{n-1}{2}(1, \dots, 1) = (\tfrac{n-1}{2}, \tfrac{n-3}{2}, \dots, -\tfrac{n-1}{2}).$$

それでは定理 4.6.2 の証明を説明する. まず, 定理 4.5.2 の s_i, ω を用いて, $\widetilde{\mathbb{F}}(x)$ 上の作用素 τ_j を

$$\tau_1 := s_1 \cdots s_{n-1}\omega, \quad \tau_2 := s_2 \cdots s_{n-1}\omega s_1^{-1}, \quad \cdots \tau_n := \omega s_1^{-1} s_2^{-1} \cdots s_{n-1}^{-1}$$

と定めると, $\tau_j = T_{q,x_j}$ となることに注意する.

以下 π を省略して $T_i = \pi(T_i) \in \mathrm{End}_{\widetilde{\mathbb{F}}} \widetilde{\mathbb{F}}(x)$ とみなし, 同様に $Y_i \in \mathrm{End}_{\widetilde{\mathbb{F}}} \widetilde{\mathbb{F}}(x)$ とみなす. §4.1 のルート系 $\Phi = \{\alpha_{ij} = \varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 1 \le i \ne j \le n\}$ を用いて

$$R(\alpha) := c(x^\alpha) + b(x^\alpha)s_\alpha \quad (\alpha \in \Phi)$$

と置くと, $T_i = R(\alpha_i)s_i$ である. また $\widetilde{\mathbb{F}}(x)$ 上の作用素として

$$wR(\alpha) = R(w.\alpha)w \quad (w \in W,\ \alpha \in \Phi)$$

となる. 従って

$$\begin{aligned} Y_1 &= T_1 T_2 \cdots T_{n-1} \cdot \omega = R(\alpha_1)s_1 R(\alpha_2)s_2 \cdots R(\alpha_{n-1})s_{n-1} \cdot s_{n-1} \cdots s_1 \tau_1 \\ &= R(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)R(\varepsilon_1 - \varepsilon_3) \cdots R(\varepsilon_1 - \varepsilon_n)s_1 s_2 \cdots s_{n-2} \cdot s_{n-2} \cdots s_1 \tau_1 \\ &= R(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)R(\varepsilon_1 - \varepsilon_3) \cdots R(\varepsilon_1 - \varepsilon_n)\tau_1. \end{aligned}$$

一般に $j = 1, \dots, n$ に対して次が成立する.

$$Y_j = R(\varepsilon_j - \varepsilon_{j+1})R(\varepsilon_j - \varepsilon_{j+2}) \cdots R(\varepsilon_j - \varepsilon_n)\tau_j R(\varepsilon_1 - \varepsilon_j)^{-1} \cdots R(\varepsilon_{j-1} - \varepsilon_j)^{-1}.$$

次に $x = (x_1, \dots, x_n)$ の対称函数 $\varphi(x) \in \widetilde{\mathbb{F}}(x)^W$ への Y_1 の作用を調べよう. 互換 $(i, j) \in W = \mathfrak{S}_n$ を $s_{i,j}$ で表すと,

$$\begin{aligned} R(\varepsilon_1 - \varepsilon_n)\tau_1(\varphi) &= c(x_1/x_n)\tau_1(\varphi) + b(x_1/x_n)s_{1,n}\tau_1(\varphi) = c(x_1/x_n)\tau_1(\varphi) + b(x_1/x_n)\tau_n s_{1,n}(\varphi) \\ &= c(x_1/x_n)\tau_1(\varphi) + b(x_1/x_n)\tau_n(\varphi) = (c(x_1/x_n)\tau_1 + b(x_1/x_n)\tau_n)(\varphi). \end{aligned}$$

$c = c(x_1/x_n)$, $c' = c(x_1/x_{n-1})$ 等と略記すると, 同様の計算で

$$\begin{aligned} &R(\varepsilon_1 - \varepsilon_{n-1})R(\varepsilon_1 - \varepsilon_n)\tau_1(\varphi) = (c'\tau_1 + b'\tau_{n-1})(c\tau_1 + b\tau_n)(\varphi) \\ &= (c'c\tau_1 + c'b\tau_n + b's_{1,n-1}(c)\tau_{n-1} + b's_{1,n-1}(b)\tau_n)(\varphi) \end{aligned}$$

$$= (c(x_1/x_{n-1})c(x_1/x_n)\tau_1 + b_{n-1}\tau_{n-1} + b_n\tau_n)(\varphi) \quad (b_{n-1}, b_n \in \widetilde{\mathbb{F}}(x))$$

となる．これを繰り返すと

$$\begin{gathered} Y_1(\varphi) = (c_1\tau_1 + b_2^1\tau_2 + \cdots + b_n^1\tau_n)(\varphi), \\ c_1 := \prod_{2\le j\le n} c(x_1/x_j) = t^{-(n-1)/2} \prod_{2\le j\le n} \frac{tx_1 - x_j}{x_1 - x_j}, \quad b_k^1 \in \widetilde{\mathbb{F}}(x). \end{gathered} \tag{4.6.1}$$

同様に

$$Y_j(\varphi) = (c_j\tau_j + b_{j+1}^j\tau_{j+1} + \cdots + b_n^j\tau_n)(\varphi) \quad (b_k^j \in \widetilde{\mathbb{F}}(x)). \tag{4.6.2}$$

ここで:

補題 4.6.4. 任意の $f(Y) \in \widetilde{\mathbb{F}}[Y^{\pm 1}]^W$ について, $L_f := \pi(f(Y)) \in \mathrm{End}_{\widetilde{\mathbb{F}}}\widetilde{\mathbb{F}}(x) \cap \mathcal{D}_{q,t}[W]_{\widetilde{\mathbb{F}}}$ は W 不変．つまり任意の $w \in W$ に対して $wL_f = L_f w$.

証明. 任意の対称函数 $\varphi(x)$ と $i = 1, \ldots, n-1$ に対して $s_iL_f\varphi = L_f\varphi$ を示せば良い．定理 4.4.6 より $f \in Z(H(\widetilde{W}))$ だから, $T_if(Y) = f(Y)T_i$, つまり $(T_i - t^{1/2})f(Y) = f(Y)(T_i - t^{1/2})$. 一方で $\pi(T_i - t^{1/2}) = c(x^{\alpha_i})(s_i - 1)$ だから $(s_i - 1)L_f = c(x^{\alpha_i})^{-1}L_fc(x^{\alpha_i})(s_i - 1)$. よって $(s_i - 1)L_f\varphi = 0$. □

この補題から, $e_1(Y) = Y_1 + \cdots + Y_n \in \widetilde{\mathbb{F}}[Y^{\pm 1}]^W$ について, L_{e_1} は W 不変．このことと (4.6.1), 及び $\tau_i = T_{q,x_i}$ から

$$L_{e_1}\varphi = \sum_{i=1}^n t^{-(n-1)/2} \prod_{j\ne i} \frac{tx_1 - x_j}{x_1 - x_j} \cdot T_{q,x_i}\varphi = t^{-(n-1)/2}D_x^{(1)}\varphi.$$

$r \ge 2$ の場合も同様の方針で対称函数 $\varphi(x)$ に対する作用が計算できて, 定理 4.6.2 を得る．

4.7　レポート問題

問題 4.1 (おすすめ問題). 等式 (4.1.3) を示せ.

問題 4.2 (おすすめ問題). 拡大アフィン Hecke 環 $H(\widetilde{W})$ において, 以下の関係式が成立することを示せ.

$$T_iY_{i+1}T_i = Y_i \quad (i = 1, \ldots, n-1), \quad T_iY_j = Y_jT_i \quad (i = 1, \ldots, n-1,\ j \ne i, i+1).$$

問題 4.3. 事実 4.3.1 の表示で定義された群 $\widetilde{W}$ と, 次の表示で定義される群 $\widetilde{W}'$ が同型であることを示せ.

$$\widetilde{W}' := \langle s_1, \ldots, s_{n-1}, \omega \mid (0)', (1)', (2)', (3)', (3)'' \rangle_{\mathrm{grp}}.$$
$$\begin{array}{lll} (0)' & s_i^2 = 1 & (i = 1, \ldots, n-1). \\ (1)' & s_is_j = s_js_i & (i, j = 1, \ldots, n-1,\ |i-j| > 1). \\ (2)' & s_is_{i+1}s_i = s_{i+1}s_is_{i+1} & (i = 1, \ldots, n-2). \\ (3)' & \omega s_i = s_{i-1}\omega & (i = 2, \ldots, n-1). \\ (3)'' & \omega^n s_i = s_i\omega^n & (i = 1, \ldots, n-1). \end{array}$$

(まず, 対応 $\omega^{-1}s_{n-1}\omega \mapsto s_0$ から群準同型 $\widetilde{W}' \to \widetilde{W}$ が定まることを示す.)

問題 4.4. 基本表現による T_i $(i = 0, \ldots, n)$ の像 $\rho(T_i) = c(X_i)s_i + b(X_i)$ が Hecke 関係式 (4.4.1) (0) を満たすことを, 以下の方針で示せ.

(1) 単純鏡映 s_i は, $\widetilde{\mathbb{F}}(x)$ 上の作用素として以下が成立する.

$$s_i(X_j) = \begin{cases} X_{i-1}X_i & (j \equiv i-1 \bmod n) \\ X_i^{-1} & (j = i) \\ X_iX_{i+1} & (j \equiv i+1 \bmod n) \\ X_j & (\text{otherwise}) \end{cases}, \quad s_i^2 = \mathrm{id}_{\widetilde{\mathbb{F}}(x)}$$

(2) $T_i' \coloneqq c(X_i)s_i + b(X_i)$, $c_i \coloneqq c(X_i)$, $\bar{t} \coloneqq t^{1/2} + t^{-1/2}$ と略記すると,

$$T_i' - t^{1/2} = c_i(s_i - 1), \quad T_i' + t^{-1/2} = c_i(s_i - 1) + \bar{t}.$$

(3) 前項から $(T_i' - t^{1/2})(T_i' + t^{-1/2}) = c_i\big((s_i-1)c_i(s_i-1) + \bar{t}(s_i-1)\big)$ となるので, $(s_i-1)c_i(s_i-1) = \bar{t}(1-s_i)$ を示せば良い.

(4) 補題 4.5.1 を使って $(s_i-1)c_i(s_i-1) = \bar{t}(1-s_i)$ を示す.

問題 4.5. $T(w) \in H(\widetilde{W})$ $(w \in W)$ 及び $Y^\nu \in H(\widetilde{W})$ $(\nu \in P)$ の, 基本表現 π による $1 \in \widetilde{\mathbb{F}}[x^{\pm 1}]$ への作用が

$$\pi(T(w))(1) = t^{\ell(w)/2}, \quad \pi(Y^\nu)(1) = t^{\langle \rho, \nu \rangle}$$

となることを示せ. 但し $\ell(w)$ は w の長さ (定義 4.1.6) であり, また $\langle \cdot, \cdot \rangle : P \times P \to \mathbb{Z}$, $\langle \mu, \nu \rangle = \sum_{i=1}^n \mu_i \nu_i$.

5　GL 型二重アフィン Hecke 環

前節の記号を引き続き用いる. 特に n 変数 $x=(x_1,\dots,x_n)$ と二つの係数体 $\mathbb{F}=\mathbb{Q}(q,t)\subset\widetilde{\mathbb{F}}=\mathbb{Q}(q,t^{1/2})$, $W=\mathfrak{S}_n$, $P=\mathbb{Z}^n$ 及び定義 4.4.1 の拡大アフィン Hecke 環を用いる:

$$H(\widetilde{W})=\langle T_0,\dots,T_{n-1},\omega^{\pm 1}\mid(0),(1),(2),(3)\rangle_{\widetilde{\mathbb{F}}\text{-alg}}.$$

5.1　定義と Cherednik 反対合

(4.2.3) の q 差分鏡映作用素環 $\mathcal{D}_{q,x}[W]_{\widetilde{\mathbb{F}}}$ を思い出そう:

$$\mathcal{D}_{q,x}[W]_{\widetilde{\mathbb{F}}}:=\bigl\{\textstyle\sum_{\mu\in P,\,w\in W}a_{\mu,w}(x)\tau^{\mu}w\mid a_{\mu,w}(x)\in\widetilde{\mathbb{F}}(x)\bigr\}.$$

定理 4.5.2 の基本表現 $\pi\colon H(\widetilde{W})\hookrightarrow\mathcal{D}_{q,x}[W]_{\widetilde{\mathbb{F}}}$ は忠実だったので, 部分環 $H(\widetilde{W})\subset\mathcal{D}_{q,x}[W]_{\widetilde{\mathbb{F}}}$ とみなせる. また (4.2.6) より, Laurent 多項式環 $\widetilde{\mathbb{F}}[x^{\pm1}]$ も $\mathcal{D}_{q,x}[W]_{\widetilde{\mathbb{F}}}$ の部分環とみなせる.

定義 5.1.1. 部分環

$$\mathbb{H}(\widetilde{W})\equiv\mathbb{H}(\widetilde{W};q,t):=\Bigl\langle H(\widetilde{W}),\widetilde{\mathbb{F}}[x^{\pm1}]\Bigr\rangle_{\widetilde{\mathbb{F}}\text{-alg}}\subset\mathcal{D}_{q,x}[W]_{\widetilde{\mathbb{F}}}$$

を GL 型二重アフィン Hecke 環 (double affine Hecke algebra, DAHA) と呼ぶ

前節の結果から, 生成元[*12]として以下のものが取れる.

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{q,x}[W]_{\widetilde{\mathbb{F}}}\supset\mathbb{H}(\widetilde{W})&=\langle x_1^{\pm1},\dots,x_n^{\pm1},T_0,T_1,\dots,T_{n-1},\omega\rangle_{\widetilde{\mathbb{F}}\text{-alg}} &(5.1.1)\\ &=\langle x_1^{\pm1},\dots,x_n^{\pm1},T_1,\dots,T_{n-1},Y_1^{\pm1},\dots,Y_n^{\pm1}\rangle_{\widetilde{\mathbb{F}}\text{-alg}}. &(5.1.2)\end{aligned}$$

また有限 Hecke 環 $H(W)=\langle T_1,\dots,T_{n-1}\rangle_{\widetilde{\mathbb{F}}\text{-alg}}\subset H(\widetilde{W})$ を使うと, $\widetilde{\mathbb{F}}$ 線形同型

$$\mathbb{H}(\widetilde{W})\cong\widetilde{\mathbb{F}}[x^{\pm1}]\otimes_{\widetilde{\mathbb{F}}}H(W)\otimes_{\widetilde{\mathbb{F}}}\widetilde{\mathbb{F}}[Y^{\pm1}] \tag{5.1.3}$$

が成立する. 特に $H(\widetilde{W})$ は基底

$$\{x^{\mu}T(w)Y^{\nu}\mid\mu,\nu\in P=\mathbb{Z}^n,\,w\in W=\mathfrak{S}_n\} \tag{5.1.4}$$

を持つ. この基底を $\mathbb{H}(\widetilde{W})$ の **PBW 基底**と呼ぶ.

更に生成元 (5.1.1) に関して, $\mathbb{H}(\widetilde{W})$ は抽象代数として次の表示を持つ.

$$\mathbb{H}(\widetilde{W})=\langle T_i\ (i=0,\dots,n-1),\omega^{\pm1},x_i^{\pm1}\ (i=1,\dots,n)\mid(0),\dots,(7)\rangle_{\widetilde{\mathbb{F}}\text{-alg}}$$
$$\begin{array}{lll}(0) & (T_i-t^{1/2})(T_i+t^{-1/2})=0 & (i=0,\dots,n-1)\\ (1) & T_iT_j=T_jT_i & (j\not\equiv i,i\pm1 \bmod n)\\ (2) & T_iT_{i+1}T_i=T_{i+1}T_iT_{i+1} & (i \bmod n \text{ で読む})\\ (3) & \omega T_i=T_{i-1}\omega,\ \omega\omega^{-1}=\omega^{-1}\omega=1 & (i \bmod n \text{ で読む})\\ (4) & x_ix_j=x_jx_i,\ x_ix_i^{-1}=x_i^{-1}x_i=1 & (i,j=1,\dots,n)\\ (5) & T_ix_j=x_jT_i & (j-i\neq 0,1)\\ (6) & T_ix_iT_i=x_{i+1} & (i=1,\dots,n-1)\\ (7) & \omega x_i=x_{i-1}\omega,\ \omega x_1=qx_n\omega & (i=2,\dots,n-1)\end{array} \tag{5.1.5}$$

*12 [N23, (8.42)] に誤植があって, Y_n^{n-1} ではなく Y_n^{-1} です.

関係式 (3) から $T_0 = \omega^{-1}T_{n-1}\omega$ であり, T_0 と x_j の関係式は (5), (6) から導出できることに注意する．また生成元 (5.1.2) について, T_i と Y_j は以下の関係式を満たす.

$$T_iY_{i+1}T_i = Y_i, \quad T_iY_j = Y_jT_i \quad (i = 1, \ldots, n-1,\ j \neq i, i+1)$$

これらの関係式と, T_i と x_j との関係式 (5), (6) を比較すると, 環 $\mathbb{H}(\widetilde{W})$ に対称性があることが推測される. 実は:

事実 5.1.2 (Cherednik anti-involution, [C95a, C95b], [N23, Theorem 8.6])**.** 生成元の対応

$$\phi(x_j) := Y_j^{-1}, \quad \phi(Y_j) := x_j^{-1} \quad (j = 1, \ldots, n), \quad \phi(T_i) := T_i \quad (i = 1, \ldots, n-1)$$

により, $\widetilde{\mathbb{F}}$ 代数の対合的な反自己同型 (involutive anti-automorphism)

$$\phi\colon \mathbb{H}(\widetilde{W}) \longrightarrow \mathbb{H}(\widetilde{W}), \quad \phi^2 = \mathrm{id}, \quad \phi(ab) = \phi(b)\phi(a)$$

が定まる．これを Cherednik anti-involution と呼ぶ.

5.2 Macdonald 対称多項式の特殊値対称性 (双対性) の証明

§2.4 で紹介した, Macdonald 対称多項式の特殊値対称性 (双対性, 定理 2.4.2) の Cherednik による証明を紹介する.

(5.1.3) から任意の $f \in \mathbb{H}(\widetilde{W})$ は

$$f = \sum_{\mu,\nu\in P,\, w\in W} f_{\mu,w,\nu}x^{\mu}T(w)Y^{\nu}, \quad f_{\mu,w,\nu} \in \widetilde{\mathbb{F}}$$

と書ける．但し $T(w) \in H(\widetilde{W})$ は事実 4.4.2 で定めた元．そこで写像 $\langle\cdot\rangle\colon \mathbb{H}(\widetilde{W}) \to \widetilde{\mathbb{F}}$ を

$$\langle f\rangle := f(1)|_{x=t^{-\rho}} = \sum_{\mu,\nu\in P,\, w\in W} f_{\mu,w,\nu}t^{-\langle\rho,\mu\rangle}t^{\ell(w)/2}t^{\langle\rho,\nu\rangle}$$

で定義し, $f \in \mathbb{H}(\widetilde{W})$ の期待値と呼ぶ．但し $\rho = (n-1, n-2, \ldots, 0) \in P = \mathbb{Z}^n$, $\langle\mu,\nu\rangle := \sum_{i=1}^{n}\mu_i\nu_i$ $(\mu,\nu \in P)$, 及び問題 4.5 の結果 $Y^{\nu}(1) = t^{\langle\rho,\nu\rangle}$, $T(w)(1) = t^{\ell(w)/2}$ を用いた.

補題 5.2.1. 期待値は Cherednik anti-involution (事実 5.1.2) で不変である:

$$\langle\phi(f)\rangle = \langle f\rangle \quad (f \in \mathbb{H}(\widetilde{W})).$$

この系として:

系 5.2.2. $\mathbb{H}(\widetilde{W})$ 上の双線形型式

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{H}(\widetilde{W}) \times \mathbb{H}(\widetilde{W}) \longrightarrow \widetilde{\mathbb{F}}, \quad \langle f, g\rangle := \langle\phi(f)g\rangle$$

は対称である:

$$\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle \quad (f, g \in \mathbb{H}(\widetilde{W})). \tag{5.2.1}$$

$\langle\cdot,\cdot\rangle$ を Cherednik 内積と呼ぼう.

定理 5.2.3 (Macdonald 対称多項式の双対性, 定理 2.4.2, [N23, Theorem 6.2, §8.5], c.f. [C95b, Theorem 3.2], [M03, (5.3.5)])**.** 任意の $\lambda, \mu \in \mathcal{P}_n$ に対して

$$\frac{P_\lambda(q^\mu t^\rho)}{P_\lambda(t^\rho)} = \frac{P_\mu(q^\lambda t^\rho)}{P_\mu(t^\rho)}.$$

証明. $\lambda, \mu \in P$ として, $P_\lambda(x)$ と $P_\mu(x)$ の Cherednik 内積 $\langle P_\lambda(x), P_\mu(x)\rangle = \big\langle \phi(P_\lambda(x))P_\mu(x)\big\rangle$ を計算しよう. 系 4.6.3 より (本節では基本表現 π を略しているので $D = Y$ と読み直して)

$$\phi(P_\lambda(x))P_\mu(x) = P_\lambda(Y^{-1})P_\mu(x) = P_\lambda(q^{-\mu}t^{-\rho})P_\mu(x).$$

従って

$$\langle P_\lambda(x), P_\mu(x)\rangle = \big\langle P_\lambda(q^{-\mu}t^{-\rho})P_\mu(x)\big\rangle = P_\lambda(q^{-\mu}t^{-\rho})P_\mu(t^{-\rho}).$$

(5.2.1) より $\langle P_\lambda(x), P_\mu(x)\rangle = \langle P_\mu(x), P_\lambda(x)\rangle$ なので

$$P_\lambda(q^{-\mu}t^{-\rho})P_\mu(t^{-\rho}) = P_\mu(q^{-\lambda}t^{-\rho})P_\lambda(t^{-\rho}). \tag{5.2.2}$$

パラメータ依存性を $P_\lambda(x) = P_\lambda(x; q, t)$ と明記すると, 問題 3.4 と定理 3.1.2 から

$$P_\lambda(x; q^{-1}, t^{-1}) = P_\lambda(x; q, t) \in \Lambda_{n,\mathbb{F}} \tag{5.2.3}$$

なので,

$$P_\lambda(q^{-\mu}t^{-\rho}; q, t) = P_\lambda(q^\mu t^\rho; q^{-1}, t^{-1}) = P_\lambda(q^\mu t^\rho; q, t) \tag{5.2.4}$$

等が成立する. 従って結論を得る. □

注意 5.2.4. 本稿では Macdonald 対称函数での議論を経由して (5.2.3) を示し, それを用いて (5.2.2) から (5.2.4) を導出した. 実は, Macdonald 対称多項式だけを用いて導出することもできる. 例えば [N23, §5.6.1, Proposition 5.1] より, $\lambda \in \mathcal{P}_n$, $\lambda_1 \le l$, $l \in \mathbb{N}$ なら

$$(x_1 \cdots x_n)^l P_\lambda(x^{-1}) = P_{(l^n)-\lambda^\vee}(x)$$

である. 但し $(l^n) - \lambda^\vee := (l - \lambda_n, \ldots, l - \lambda_1) \in \mathcal{P}_n$. これを用いて (5.2.2) から (5.2.4) を導出することができる. 詳細は読者に任せる.

5.3 古典極限の Poisson 構造

体 k 上の線形空間 V と, パラメータ $\hbar$ に依存する (単位元の存在は仮定しない) $k[\![\hbar]\!]$ 代数構造 $A_\hbar = (V[\![\hbar]\!] = V \otimes_k k[\![\hbar]\!], \circ_\hbar)$ が与えられているとする. つまり $a, b \in V$ に対して積 $a \circ_\hbar b \in V[\![\hbar]\!]$ が与えられていて, 一般の $V[\![\hbar]\!]$ の元の積 $\circ_\hbar$ は $k[\![\hbar]\!]$ 双線形に拡張して得られるものとする. $a, b \in V$ の積を $\hbar$ 展開して

$$a \circ_\hbar b = \textstyle\sum_{m \ge 0} \mu_m(a, b)\hbar^m, \quad \mu_m(a, b) \in V$$

と表せば, 各 $\mu_m \colon V \times V \to V$ は k 双線形写像である. また μ_0 は A_0 の k 代数構造を与える.

これ以降, A_0 は可換環, つまり $\mu_0(a, b) = \mu_0(b, a)$ $(a, b \in V)$ だと仮定し, $ab := \mu_0(a, b)$ と書こう. すると μ_1 に関して以下の主張が従う (証明は問題 5.1).

命題 5.3.1. (1) μ_1 の交代化 $\{a,b\} \coloneqq \mu_1(a,b)-\mu_1(b,a)$ は μ_0 に関する双導分 (biderivation), つまり両変数について Leibniz 則を満たす:

$$\{ab,c\} = a\{b,c\}+\{a,c\}b, \quad \{a,bc\} = b\{a,c\}+\{a,b\}c \quad (a,b,c \in V).$$

(2) μ_1 の交代化 $\{\cdot,\cdot\}$ は Jacobi 律を満たす:

$$\{a,\{b,c\}\}+\{b,\{c,a\}\}+\{c,\{a,b\}\}=0.$$

従って $A_{\mathrm{cl}} \coloneqq (V,\mu_0,\{\cdot,\cdot\})$ は (可換) Poisson 代数である. A_{cl} を $A_\hbar$ の古典極限と呼ぶ.

以上の構成の逆, つまり k 上の Poisson 代数 $P=(V,\mu_0,\{\cdot,\cdot\})$ に対し, $k[\![\hbar]\!]$ 代数 $(V[\![\hbar]\!],\circ_\hbar)$ であって $\circ_\hbar = \sum_{m\geq 0}\hbar^m\mu_m$ かつ μ の交代化が $\{\cdot,\cdot\}$ になるものを P の形式的変形量子化 (formal deformation quantization) と呼ぶ.

例 5.3.2. 体 k の標数を 0 とする. 多項式係数の q 差分作用素環 $k[x][\tau^{\pm 1}]$ (式 (4.2.1) 参照) は

$$\begin{gathered} k[x][\tau^{\pm1}] = \big\langle x_1,\dots,x_n,\tau_1^{\pm1},\dots,\tau_n^{\pm1} \mid (1),(2),(3)\big\rangle_{k\text{-alg}} \\ \begin{array}{lll} (1) & x_ix_j = x_jx_i & (i,j=1,\dots,n) \\ (2) & \tau_i\tau_j=\tau_j\tau_i,\ \tau_i^{\pm1}\tau_i^{\mp1}=1 & (i,j=1,\dots,n) \\ (3) & \tau_ix_j = q^{\delta_{i,j}}x_j\tau_i & (i,j=1,\dots,n) \end{array} \end{gathered}$$

と表示できる. $q=\exp(\hbar)=\sum_{m\geq0}\hbar^m/m!$ として, この代数を $A_\hbar$ とすると, $\hbar$ に依存する基本関係式は (3) だけで, A_0 が可換環 $k[x,\tau^{\pm1}]$ であることが分かる. この場合の古典極限 A_{cl} は, 式の簡明化のため $\{a,b\} \coloneqq \frac{1}{2}\big(P_1(a,b)-P_1(b,a)\big)$ とすると

$$A_{\mathrm{cl}} = (k[x,\tau^{\pm1}],\cdot,\{\cdot,\cdot\}), \quad \{\tau_i,x_j\}=\delta_{i,j}x_i\tau_i, \quad \{\text{その他}\}=0.$$

そこで (形式的に) $p_i \coloneqq \log\tau_i$, $\xi_i \coloneqq \log x_i$ とすると, $\{\cdot,\cdot\}$ が双導分であることから

$$\{p_i,x_j\} = \tau_i^{-1}\{\tau_i,x_j\} = \delta_{ij}x_i, \quad \{p_i,\xi_j\} = x_j^{-1}\{p_i,x_j\} = \delta_{ij}.$$

つまり A_{cl} は $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)$ を座標とするアフィン空間 $\mathbb{A}^n_\xi = \operatorname{Spec} k[\xi]$ の余接束 $T^*\mathbb{A}^n_\xi$ 上の標準的な Poisson 構造 (シンプレクティック構造) である.

この例の類似を GL 型二重アフィン Hecke 環において考えたい. 簡単のため, これ以降

$$\mathbb{H} \coloneqq \mathbb{H}(\widetilde{W};q,t), \quad \mathbb{H}_\tau \coloneqq \mathbb{H}(\widetilde{W};1,\tau^2)$$

と略記し, $\mathbb{H}$ は $\widetilde{\mathbb{F}}=\mathbb{Q}(q,t^{1/2})$ 上の[*13], $\mathbb{H}_\tau$ は $k=\mathbb{Q}(t^{1/2})$ 上の代数とみなす. また有限 Hecke 環を

$$H \coloneqq H(W) = \langle T_1,\dots,T_n\rangle_{k\text{-alg}} \subset \mathbb{H}$$

と略記する. 基本関係式 (5.1.5) から H は q に依存しないので, 部分 k 代数 $H \subset \mathbb{H}_\tau$ とみなせる.

例 5.3.2 の類似として, 環 $\mathbb{H}$ の $q=1$ での "古典極限" を考えたい所だが, 基本関係式 (5.1.5) から明らかなように, $\mathbb{H}_\tau$ は可換ではない. そこで, $\mathbb{H}_\tau$ の中心

$$Z_\tau \coloneqq Z(\mathbb{H}_\tau) = \{z\in\mathbb{H}_\tau \mid za=az\ \forall a\in\mathbb{H}_\tau\}$$

[*13] 例 5.3.2 の類似を忠実に取るのであれば, 本来は $q=e^\hbar$ として, $\mathbb{H}$ を $\mathbb{Q}(t^{1/2})[\![\hbar]\!]$ 上の代数とみなせることを示すべきですが, その議論は省略します.

に注目しよう．そして有限 Hecke 環 H の対称化作用素 (symmetrizer) を

$$e := \sum_{w\in W} t^{\ell(w)/2} T(w) / \sum_{w\in W} t^{\ell(w)} \in H \tag{5.3.1}$$

と表す．但し $\ell(w)$ は $w \in W = \mathfrak{S}_n$ の長さ (定義 4.1.6) であり，また $T(w) \in H$ は事実 4.4.2 で定めた元である．$e^2 = e$ に注意する (問題 5.2).

次の事実を紹介する．

事実 5.3.3 ([Ob04, Theorem 5.1])**.** $\mathbb{H}_\tau$ の **spherical subalgebra** $e\mathbb{H}_\tau e := \{ehe \mid h \in \mathbb{H}_\tau\}$ は可換であり，中心 $Z_\tau = Z(\mathbb{H}_\tau)$ と次の写像によって同型である:

$$Z_\tau \xrightarrow{\sim} e\mathbb{H}_\tau e, \quad z \longmapsto ze = eze.$$

注意 5.3.4. $e^2 = e$ より $\mathbb{H}_\tau$ の積で $e\mathbb{H}_\tau e$ は閉じている．また $e\mathbb{H}_\tau e$ は e を単位元に持つ．従って $e\mathbb{H}_\tau e$ は $\mathbb{H}_\tau$ の部分環だが, 単位元は共有しない．

例 5.3.5. $n = 2$ の場合を調べる．$T := T_1$ と略記すると

$$\mathbb{H}_\tau = \langle T_0, T, \omega, x_1^{\pm 1}, x_2^{\pm 1} \rangle_{k\text{-alg}} = \langle x_1^{\pm 1}, x_2^{\pm 1}, T, Y_1^{\pm 1}, Y_2^{\pm 1} \rangle_{k\text{-alg}}.$$

まず $e\mathbb{H}_\tau e$ の可換性を示す．生成元 $\xi = Y_i^{\pm 1}, T, x_i^{\pm 1}$ について $e\xi e$ 達が可換であることを示せば良い．

- $\xi = T$ について．$e = (1 + t^{1/2}T)/(1 + t)$ と Hecke 関係式 (5.1.5) (0) から
$$eT = Te = eTe = t^{1/2}e$$
となるので, eTe は他の $e\xi e$ と可換．
- $\xi = x_1^{\pm 1}, x_2^{\pm 1}$ について．基本関係式 (5.1.5) (6) と前項より $ex_2e = eTx_1Te = tex_1e$ となるので, $ex_1^{\pm 1}e$ と $ex_2^{\pm 1}e$ は可換である．また $i, j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ に対して
$$e(x_1^i + x_2^j)e = (1 + t^j)ex_1e = (t^{-i} + 1)ex_2e.$$
- $\xi = Y_1^{\pm 1}, Y_2^{\pm 1}$ については, 事実 5.1.2 の Cherednik 反対合 ϕ: $Y_i^{\pm 1} \mapsto x_i^{\mp 1}$ で前項に帰着される．また,
$$e(Y_1^i + Y_2^j)e = (1 + t^{-j})eY_1e = (t^i + 1)eY_2e \quad (i, j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}).$$
- $\xi = x_i^{\pm 1}, Y_j^{\pm 1}$ について．前項及び前々項より $\xi = x_1, Y_1$ だけ調べれば十分．$c := (1 + t)^{-1}$, $\tau := t^{1/2}$, $\overline{\tau} := \tau - \tau^{-1}$ と略記すると, 基本関係式 (0), (6), (7) 及び $eT = Te = \tau e$ より
$$\begin{aligned} ex_1e \cdot eY_1e &= ex_1eY_1e = cex_1(1 + \tau T)T\omega e = ce(x_1T + \tau x_1(\overline{\tau}T + 1))\omega e \\ &= ce(T^{-1}x_2 + \tau\overline{\tau}T^{-1}x_2 + \tau x_1)\omega e = ce(\tau^{-1}x_2 + \overline{\tau}x_2 + \tau x_1)\omega e = \tau ce(x_1 + x_2)\omega e, \\ ex_1e \cdot eY_1e &= ceT\omega(1 + \tau T)x_1e = \tau ce\omega(x_1 + \tau x_2T^{-1})e = \tau ce(x_2\omega + x_1\omega)e = \tau ce(x_1 + x_2)\omega e. \end{aligned}$$

以上より $e\mathbb{H}_\tau e$ は可換である．更に $e\mathbb{H}_\tau e$ は, $W = \mathfrak{S}_2 = \langle s_1 \rangle_{\text{grp}}$ の $x = (x_1, x_2)$, $Y = (Y_1, Y_2)$ への置換作用 $s_1(x_1) = x_2$, $s_1(Y_1) = Y_2$ に関する, Laurent 多項式環 $k[x^{\pm 1}, Y^{\pm 1}]$ の W 不変部分と対応することも分かる:

$$e\mathbb{H}_\tau e = ek[x^{\pm 1}, Y^{\pm 1}]^W e.$$

一方で $Z_\tau = k[x^{\pm 1}, Y^{\pm 1}]^W$ が基本関係式 (5.1.5) と PBW 基底 (5.1.4) を使って示せる．従って $Z_\tau = Z(\mathbb{H}_\tau) \to e\mathbb{H}_\tau e$, $z \mapsto ze$ は同型である．

更に可換環 $Z_\tau \cong e\mathbb{H}_\tau e$ は整域であり [Ob04, Theorem 5.1], 従って $\operatorname{Spec}(Z_1)$ は既約な Poisson 代数多様体である．この Poisson 多様体が, 本副節表題の Calogero-Moser 空間と関係することを次の副節で説明する．その準備として, もう少し spherical subalgebra に関する事実を紹介する．

これ以降 $\tau = t^{1/2} \in \mathbb{C}^*$ を generic な複素数とし, $k = \mathbb{Q}(t^{1/2})$ を $\mathbb{C}$ に置き換える．$\mathbb{H}_\tau$ に関して基本表現 $\rho = \rho_{q,t}$ を書き下すと次のようになる．まず $x = (x_1, \ldots, x_n)$ に加えて可換な変数族 $y = (y_1, \ldots, y_n)$ を用意し, 可換環 R を

$$R := \mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]_{\delta(x)}, \quad \delta(x) := \textstyle\prod_{1 \le i < j \le n} (1 - x_i/x_j)$$

で定義する．但し添え字の $\delta(x)$ はそれが生成するイデアルによる局所化 (分母に $\delta(x)$ とその倍数を添加した有理式のなす環) を意味する．R には $W = \mathfrak{S}_n$ が

$$w(x_i) := x_{w(i)}, \quad w(y_i) := y_{w(i)} \quad (w \in W)$$

で作用する．この作用に関する R と W のスマッシュ積を $\widetilde{R}$ で表そう．つまり

$$\widetilde{R} := R\#W = \bigl\{\textstyle\sum_{w\in W} f_w(x,y)w \mid f_w(x,y) \in R\bigr\}, \quad f(x,y)w \cdot f'(x,y)w' = f(x,y)(wf')(x,y)ww'$$

すると $\mathbb{H}_\tau = \bigl\langle Y_i^{\pm 1}, T_i, x_i^{\pm 1}\bigr\rangle_{k\text{-alg}}$ の基本表現は次のように書ける．

$$\rho = \rho_{1,\tau^2} \colon H_1 \longhookrightarrow \widetilde{R}, \quad x_i \longmapsto x_i, \quad T_i \longmapsto \tau s_i + \frac{\tau - \tau^{-1}}{1 - x_i/x_{i+1}}(1 - s_i), \quad Y_i \longmapsto y_i.$$

環 $R, \widetilde{R}$ を用いて $\mathbb{H}_\tau$ の既約表現が構成できる．まず $(\xi, \eta) \in (\mathbb{C}^*)^{2n} \backslash = (\mathbb{C}^*)^n \times (\mathbb{C}^*)^n$ に対して

$$\chi_{\xi,\eta} \colon R \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(x,y) \longmapsto f(\xi,\eta)$$

を R の指標 (1 次元 R 加群) とする．そして

$$V_{\xi,\eta} := \widetilde{R} \otimes_R \chi_{\xi,\eta}$$

とすれば, 基本表現 $\rho \colon \mathbb{H}_\tau \hookrightarrow \widetilde{R}$ によって $V_{\xi,\eta}$ は有限次元 $\mathbb{H}_\tau$ 加群になる．

事実 5.3.6 ([Ob04, Proposition 3.3, §3.4])**.** $\delta_\tau(\xi) \neq 0$ なら $V_{\xi,\eta}$ は既約 $\mathbb{H}_\tau$ 加群．但し

$$\delta_\tau(\xi) := \textstyle\prod_{i\neq j} (1 - \xi/\xi_j)(\tau^{-1} - \tau\xi_i/\xi_j). \tag{5.3.2}$$

この時, 更に有限 Hecke 環 $H = H(W) \subset \mathbb{H}_\tau$ の左加群としての同型

$$H \xrightarrow{\sim} V_{\mu,\nu}, \quad T(w) \longmapsto T(w)1 \otimes 1 \quad (w \in W)$$

がある．特に $V_{\mu,\nu}$ は正則 H 加群 (regular H-module) であり, $\dim_{\mathbb{C}} V_{\xi,\eta} = n!$.

有限次元既約 $\mathbb{H}_\tau$ 加群であって, 部分環 $H \subset \mathbb{H}_\tau$ に関して正則加群であるもの全体のなす集合を $\mathrm{Irrep}^{n!}$ と書き, そのうち事実 5.3.7 の $V_{\xi,\eta}$ がなす部分集合を $\mathfrak{U} \subset \mathrm{Irrep}^{n!}$ と書く．つまり $\mathfrak{U} := \{V_{\xi,\eta} \mid \xi, \eta \in (\mathbb{C}^*)^n, \, \delta_\tau(\xi) \neq 0\}$.

最後に, 有限 Hecke 環 $H = H(W) = \langle T_1, \ldots, T_n \rangle_{\mathbb{C}\text{-alg}}$ の部分環

$$H' \equiv H(\mathfrak{S}_{n-1}) := \langle T_2. \ldots, T_n \rangle_{\mathbb{C}\text{-alg}} \subset H$$

について, H 加群 V に対し $V^{H'} \coloneqq \{v \in V \mid T_i v = \tau v\ (i = 2, \ldots, n-1)\}$ とする．すると任意の $V \in \mathrm{Irrep}^{n!}$ に対して $\dim_k V^{H'} = n$ である．また基本表現によって $\mathbb{H} \subset \widetilde{R}$ とみなすと, $x_1, y_1 \in \mathbb{H}_\tau$ の V への作用は H' の作用と可換である．従って, 次のように $\mathrm{GL}(V^{H'}) \cong \mathrm{GL}(n; \mathbb{C})$ の元を定めることができる．

$$\overline{x}_1 \coloneqq x_1|_{V^{H'}}, \quad \overline{y}_1 \coloneqq y_1|_{V^{H'}} \quad \in \mathrm{GL}(V^{H'}).$$

事実 5.3.7 ([Ob04, Proposition 4.1])**.** 任意の $V \in \mathrm{Irrep}^{n!}$ について

$$\mathrm{rank}(\overline{x}_1 \overline{y}_1 \overline{x}_1^{-1} \overline{y}_1^{-1} - \tau^2) = 1.$$

5.4 Calogero-Moser 空間の変形量子化

引き続き $\tau = t^{1/2} \in \mathbb{C}^*$ を generic な複素数とし, $k = \mathbb{Q}(t^{1/2})$ を $\mathbb{C}$ に置き換える．E を $\mathbb{C}$ 上の n 次元線形空間とし, $\mathrm{GL}(E) \times \mathrm{GL}(E) \times E \times E^*$ の部分集合

$$CM'_\tau \coloneqq \{(X, Y, U, V) \mid X^{-1}Y^{-1}XY - \tau^{-1} = U \otimes V\}$$

を考える．これは自然にアフィン代数多様体の構造を持ち, 代数群 $\mathrm{GL}(E)$ の作用

$$(X, Y, U, V) \longmapsto (gXg^{-1}, gYg^{-1}, GU, Vg^{-1}), \quad g \in \mathrm{GL}(E)$$

を持つ．[Ob04, Lemma 2.1, 2.2] より $\tau^{2i} \neq 1\ (i = 1, \ldots, n)$ ならこの作用は自由であり, また CM'_τ は非特異である．以下では τ の genericity としてこの条件を課す．従って

$$CM_\tau \coloneqq CM'_\tau /\!\!/ \mathrm{GL}(E) = \mathrm{Spec}\big(\mathbb{C}[CM'_\tau]^{\mathrm{GL}(E)}\big)$$

は次元 $2n$ の非特異代数多様体である．また既約性が示せる [Ob04, Proposition 2.2].

定義 5.4.1. 次元 $2n$ の非特異既約代数多様体 CM_τ を **Calogero-Moser 空間**と呼ぶ.

この副節の目標は:

事実 5.4.2 ([Ob04, Theorem 6.1])**.** CM_τ には Poisson 構造があって, また次の Poisson 代数多様体の同型がある．

$$\Upsilon\colon \mathrm{Spec}(Z_\tau) \xrightarrow{\sim} CM_\tau,$$

CM_τ の Poisson 構造を記述するために, いくつか準備をしよう．

前副節で構成した $\mathbb{H}_\tau$ 加群の集合 $\mathrm{Irrep}^{n!}$ について, 事実 5.3.7 より

$$\Phi\colon \mathrm{Irrep}^{n!} \longrightarrow CM_\tau, \quad V \longmapsto (\overline{x}_1, \overline{y}_1)$$

が well-defined になる．また開部分集合 $\mathfrak{U} \subset \mathrm{Irrep}^{n!}$ 上では Φ は次のような形になる．有限 Hecke 環とその部分環 $H = H(\mathfrak{S}_n) \subset H' = H(\mathfrak{S}_{n-1})$ を思い出そう．

事実 5.4.3 ([Ob04, Proposition 4.2])**.** 既約 $\mathbb{H}_\tau$ 加群 $V_{\xi,\eta} \in \mathfrak{U}$ について, $e_i \coloneqq (\sum_{w' \in \mathfrak{S}_{n-1}} w')(1, i)\ (i = 1, \ldots, n)$ は $V^{H'}$ の基底になる．それに関する $\overline{x}_1, \overline{y}_1$ の表現行列について,

$$\overline{x}_1 = \mathrm{diag}(\xi_1, \ldots, \xi_n), \quad (\overline{y}_1)_{ii} = \eta_i \prod_{j \neq i} \frac{\tau^{-1}\xi_i - \tau\xi_j}{\xi_j - \xi_i} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

そこで CM_τ の稠密開集合 $\mathbf{U}$ とその座標を次のように定義する．まず $\mathbb{C}$ 係数 n 次行列 X,Y を

$$\begin{aligned} &X := \mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n),\\ &Y := (Y_{ij})_{i,j=1}^n,\quad Y_{ii} := q_i,\quad Y_{ij} := (\tau^{-1}-\tau)q_i\lambda_j/(\tau^{-1}\lambda_i-\tau\lambda_j)\quad (i\neq j)\end{aligned}\tag{5.4.1}$$

と定める．但し $\lambda,\mu\in(\mathbb{C}^*)^n$, $\tau\lambda_i\neq\tau^{-1}\lambda_j$ $(i\neq j)$．すると

$$R := \tau^{-1}XY-\tau XY,\quad R_{ij}=(\tau-\tau^{-1})q_i\lambda_j,\quad \therefore\ \mathrm{rank}\,R=1.$$

Cauchy 行列式 (3.3.1) を使うと $\det(Y)\neq 0 \iff \lambda_i\neq\lambda_j$ $(i\neq j)$ が分かる．また:

事実 5.4.4 ([Ob04, Proposition 2.1])**.** 点 $(X,Y,U,V)\in CM'_\tau$ は, X が対角化可能で固有値 λ_i が相異なり, かつ $\tau\lambda_i\neq\tau^{-1}\lambda_j$ だとする．すると, この点の $\mathrm{GL}(E)$ 軌道には, 適当な $q\in(\mathbb{C}^*)^n$ について (5.4.1) を満たし, かつ $V={}^t\lambda={}^t(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ となる点が, $(\lambda_i,q_i)_{i=1}^n$ の同時置換を除いて一意に存在する．

従って, 事実 5.4.4 の条件を満たす (X,Y,U,V) のなす開集合 $\mathbf{U}'\subset CM'_\tau$ の商は開集合

$$\mathbf{U} := \mathbf{U}'/\,\mathrm{GL}(E)\subset CM_\tau$$

を定める．CM_τ の既約性から $\mathbf{U}$ は稠密であり, また CM_τ の非特異性から (λ,q) が $\mathbf{U}$ の座標函数を与える．

CM_τ には次のような Poisson 構造がある．

事実 5.4.5 ([FR99], [Ob04, §2.4])**.** CM_τ 上の Poisson 括弧 $\{\cdot,\cdot\}_{FR}$ であって, $\mathbf{U}\subset CM_\tau$ 上で

$$\{\lambda_i,\lambda_j\}_{FR}=0,\quad \{\lambda_i,q_j\}_{FR}=\lambda_i q_j\delta_{i,j},\quad \{q_i,q_j\}_{FR}=\frac{(\tau-\tau^{-1})^2q_iq_j(\lambda_i+\lambda_j)\lambda_i\lambda_j}{(\tau^{-1}\lambda_i-\tau\lambda_j)(\tau^{-1}\lambda_j-\tau\lambda_i)(\lambda_i-\lambda_j)}.$$

さて, 写像 $\Upsilon\colon \mathrm{Spec}(Z_\tau)\to CM_\tau$ の構成に移ろう．$(\xi,\eta)\in(\mathbb{C}^*)^{2n}$, $\xi\notin D_\tau$ とする．指標 $\chi_{\xi,\eta}\colon\widetilde{R}\to\mathbb{C}$ を $Z_\tau\subset(Z_\tau)_{\delta_\tau(x)}\cong\widetilde{R}$ ([Ob04, Theorem 5.1]) に制限して, 更に同型 $Z_\tau\cong e\mathbb{H}_\tau e$ を使うことで, $e\mathbb{H}_\tau e$ の指標が得られる．それを同じ記号 $\chi_{\xi,\eta}$ で表す．

事実 5.4.6 ([Ob04, Lemma 6.1])**.** $(\xi,\eta)\in(\mathbb{C}^*)^{2n}$, $\xi\notin D_\tau$ なら, $\mathbb{H}_\tau$ 加群として

$$\mathbb{H}_\tau e\otimes_{e\mathbb{H}_\tau e}\chi_{\xi,\eta}\cong V_{\xi,\eta}.$$

これから射

$$\Upsilon\colon \mathrm{Spec}(Z_\tau)_{\delta_\tau(x)}\longrightarrow CM_\tau,\quad (\xi,\eta)\longmapsto\Phi(V_{\xi,\eta}),$$

つまり有理写像 $\Upsilon\colon\mathrm{Spec}\,Z\dashrightarrow CM_\tau$ が定義できる．実はこれが $\mathrm{Spec}\,Z$ 上に延長されて, Poisson 構造も保つ, というのが事実 5.4.2 の主張である．

5.5　レポート問題

問題 5.1. 命題 5.3.1 を示せ．

問題 5.2. 有限 Hecke 環 (5.3.1)

付録 A　ルート系に付随した Macdonald 多項式

本文では GL 型に限って話を進めたが, より一般のルート系 (ないしルート格子) に対して Macdonald 多項式の理論が展開できる. その概要を説明しよう. まず歴史的経緯を概説すると:

- 1987 年頃, Macdonald が Weyl 群対称性を持つ多変数 q 直交多項式系を導入 [M].
  - 同時期に Ruijsenaars が楕円 q 差分作用素の可換族を導入 [R87].
- 1990 年前後, 当時研究が進んでいた量子群の表現論において, Macdonald 多項式のパラメータ特殊化の一部が行列要素で実現された (球函数の q 類似).
  - しかし, 任意パラメータの場合を量子群で実現することができなかった.
- Cherednik のアプローチ: qKZ 方程式 [C92a] とアフィン Hecke 環 [C92b] を使う.
  - DAHA を導入し, Macdonald 多項式に関する諸予想を解決 [C95a, C95b].

以上で, [M72] の意味で被約なアフィンルート系に対する Macdonald 多項式の理論が凡そ確立した.

一方, 非被約なアフィンルート系については:

- 1970 年代末から Askey と Wilson が q 直交超幾何多項式の分類理論を建設 ([KLS10] 参照).
  - 特に Askey-Wilson 多項式 [AW85] を導入.
- 1992 年に Koornwinder が Askey-Wilson 多項式の多変数化を導入 [K92].
- 1995 年に van Diejen が Koornwinder 多項式を固有多項式に持つ可換 q 差分作用素族を導入 [vD95].
- 1995 年に野海が C 型アフィン Hecke 環の新しい表現 (基本表現) を導入し, Koornwinder 多項式がその基底であることを証明 [野 95, NS04].
- 1998 年に Sahi が非被約なアフィンルート系について Cherednik の議論を拡張 [S99].
  - 特に野海 [野 95] の構成は $(\mathrm{C}_n^\vee, \mathrm{C}_n)$ 型アフィンルート系に付随したものと理解できる.
- 2003 年の Macdonald の本で被約 (Cherednik) と非被約 (野海, Sahi) を統合 [M03].
- [M72] における非被約アフィンルート系の分類に不備があって, Stokman が修正 [St11].

以上で "アフィン Hecke 環に基づく Macdonald 多項式の理論" が凡そ確立した.

しかしこの定式化には一つ問題があって, 本稿の主眼であった GL 型が扱えない. そこで:

- Haiman が GL 型と被約アフィンルート系とを, 格子に基づいた定式化で統一 [H06].
- Stokman が, 更に非被約アフィンルート系を含めた理論を構成 [St11].

現在 **Macdonald-Cherednik 理論**といったら, アフィン Hecke 環に基づく Macdonald 多項式の理論を指す. このアプローチとしては, [St11] が現状最も一般的だと思われる.

以下では [M03] の Macdonald-Cherednik 理論を概説する. 従って GL 型は除かれるが, 用語や議論は本文で述べたものと整合的である.

- 適当な条件を満たす, Macdonald [M72] の意味でのアフィンルート系の組 (S, S') に適用可.
- 組 (S, S') は 3 つのクラスに分かれる:
  (1) $(S, S') = (S(R), S(R^\vee))$, R: 既約有限ルート系.
  (2) $S = S' = S(R)^\vee$, R: 既約有限ルート系.
  (3) $S = S'$: 被約でないアフィンルート系, (X, Y) 型.
  - A_n 型 Macdonald 多項式は (I) または (II) の $S = S' = S(\mathrm{A}_n)$ に対応.
    特に A_1 型が注意 1.3.12 の Rogers 多項式.
  - Koornwinder 多項式は (III) の $(\mathrm{C}_n^\vee, \mathrm{C}_n)$ 型. 特に Askey-Wilson 多項式は $(\mathrm{C}_1^\vee, \mathrm{C}_1)$ 型.

アフィンルート系の組 (S, S') が与えられると, 以下の構成ができる:

- 拡大アフィン Weyl 群 $\widetilde{W} := W \ltimes \tau^{L'}$. W は S に由来する有限 Weyl 群, L' は S' 由来の格子.
  - GL 型の $W = \mathfrak{S}_n$, $L' = P = \mathbb{Z}^n$, $\widetilde{W} = W \ltimes \tau^P$ (事実 4.3.1, (4.3.6) 参照) に対応.
- 拡大アフィン Hecke 環 $H(\widetilde{W})$ とその基本表現 (q 差分鏡映作用素実現) $H(\widetilde{W}) \curvearrowright \mathbb{C}[x^{\pm 1}]$.
- q-Dunkl 作用素 Y_i と Macdonald 作用素 $f(Y_i) \curvearrowright \mathbb{C}[x^{\pm 1}]^W$, $f \in \mathbb{C}[Y^{\pm 1}]^W$.
- Macdonald-Koornwinder 多項式 $P_\lambda(x; q, t_*)$: 三角性と同時固有性を持つ $\mathbb{C}[x^{\pm 1}]^W$ の基底.
  - λ は “優整ウェイト” $L'_+ \subset L'$ を走る. GL 型なら $L'_+ = \mathcal{P}_n \subset L' = P = \mathbb{Z}^n$.
  - (t パラメータの数) = (アフィンルート系 S の $\widetilde{W}$ 軌道の数).
    GL,A,D,E: t;　 B,C,F,G: t_l, t_s;　 BC: t_l, t_m, t_s;
    $(\mathrm{C}_1^\vee, \mathrm{C}_1)$: $t_0, t_0^\vee, t_1, t_1^\vee$;　 $(\mathrm{C}_n^\vee, \mathrm{C}_n)$: $t, t_0, t_0^\vee, t_n, t_n^\vee$ $(n \geq 2)$.

付録 B　ルート系に付随した二重アフィン Hecke 環

§5.1 で GL 型 DAHA (二重アフィン Hecke 環) $\mathbb{H}(\widetilde{W})$ を導入した．そこでの定義は，拡大アフィン Hecke 環 $H(\widetilde{W})$ の基本表現 (q 差分鏡映作用素実現) に基づくものだった．前節で紹介した一般のアフィンルート系の対 (S,S') についても，同様に基本表現を使って DAHA $\mathbb{H}(\widetilde{W})$ を導入することができる．

Macdonald 多項式の理論を理解する上では，この $\mathbb{H}(\widetilde{W})$ の構成を知っていれば十分である．しかし近年 DAHA は色々な文脈で現れていて，抽象環として DAHA の理解を深めることはますます重要だと思われる．

現在，DAHA の構成には以下の方法が知られている．

(i) 拡大アフィン Hecke 環の基本表現に基づく方法．GL 型の場合を §5.1 で説明した．

(ii) 二重アフィン組紐群 (double affine braid group) [M03, §3.4] の商として定義する方法．

- 拡大アフィン Hecke 環が拡大アフィン組紐群の群環の商である (§4.3) ことの類似．

(iii) 二重アフィン Artin 群*14 (double affine Artin group) の商として定義する方法 [IS21]．

(iv) 楕円 Artin 群の自然な商として楕円 Hecke 環を定義し，それと DAHA との同型を作る方法 [SS09]．

(i) と (ii) は単純な書き換えなので，得られる環のリストは一致する．(iii) と (i) の比較は [IS21, Chapter 10] に，(iv) と (i) の比較は [SS09, Appendices D,E] にまとめられている*15．

付録 C　Macdonald 多項式関連の計算機プログラム

Macdonald 対称多項式の明示式は，§1.3 の 例 1.3.10 や 例 1.3.10 で手計算したように，あるいはタブロー表示 (事実 3.4.8) からも分かるように，非常に複雑である．そこで研究で Macdonald 対称多項式を使う際は，計算機の手助けを借りることのが得策である．

公開されている Macdonald 多項式関連のプログラムは，例えば:

- SageMath の Combinatorics - Macdonald Polynomials
  https://doc.sagemath.org/html/en/reference/combinat/sage/combinat/sf/macdonald.html
  SageMath は様々な数学関連プログラムの統合インターフェイス*16．代数的組み合わせ論のパッケージ下に Macdonald 多項式関連のプログラムがあります．
- J. Stembridge の Maple パッケージ SF*17
  https://dept.math.lsa.umich.edu/~jrs/maple.html
  商用ソフトウェア Maple のパッケージとして Stembridge が作った対称函数のプログラム集．主要部は，直交内積を入力するとドミナンス半順序に関する直交化をするプログラム．

*14 Artin 群と組紐群はしばしば混同されて使用されますが，筆者が理解する限り，[M03, §3.4] の二重アフィン組紐群と [IS21] の二重アフィン Artin 群は違うものです (共通部分はある)．

*15 筆者が理解する限り，(iii) と (iv) どちらの場合も，必要ならパラメータ特殊化をすることで (i) のリストが全て復元できて，更に “より複雑なものは出てこない”，つまり本質的に (i) $\cong$ (iii) $\cong$ (iv) ということだと思います．

*16 2023 年現在，自由性や汎用性の点で最も優れているシステムだと思います．

*17 筆者は大学院生時代にはこれをブラックボックス的に使っていました．2012 年の夏に一念発起して Mathematica に移植して，現在でもそれを使っています．

参考文献

[AW85] R. Askey, R. Wilson, *Some basic hypergeometric orthogonal polynomials that generalize Jacobi polynomials*, Mem. Amer. Math. Soc. **319**, Amer., Math. Soc., Providence, RI, 1985.

[C92a] I. Cherednik, “Quantum Knizhnik-Zamolodchikov equations and affine root systems”, Commun. Math. Phys., **150** (1992), 109–136.

[C92b] I. Cherednik, “Double affine Hecke algebras, Knizhnik-Zamolodchikov equations, and Macdonald’s operators”, Int. Math. Res. Notices **1992**, 171–180.

[C95a] I. Cherednik, “Double affine Hecke algebras and Macdonald’s conjectures”, Ann. Math., **141** (1995) 191–216.

[C95b] I. Cherednik, “Macdonald’s evaluation conjectures and difference Fourier transform”, Invent. Math., **122** (1995), no. 1, 191–216; Erratum, Invent. Math., **125** (1996), no. 2, 391.

[C05] I. Cherednik, “Double affine Hecke algebras”, London Math. Soc. Lecture Note Series, **319**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005.

[FR99] V. V. Fock, A. A. Rosly, “Poisson structure on moduli of flat connections on Riemann surfaces and the r-matrix”, in “Moscow Seminar in Mathematical Physics”, 67–86, Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2, **191**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999: arXiv:math/9802054.

[vD95] J. F. van Diejen, “Commuting difference operators with polynomial eigenvalues”, Compos. Math., **95** (1995), 183–233.

[GR04] G. Gasper, M. Rahman, “Basic Hypergeometric Series”, 2nd ed., Encyclopedia of math. and its appl., **96**, Cambridge Univ. Press., 2004.

[H06] M. Haiman, “Cherednik algebras, Macdonald polynomials and combinatorics”, Proc. International Congress of Mathematicians. Vol. III, 843–872, Eur. Math. Soc., Zürich, 2006.

[HTT] R. Hotta, K. Takeuchi, T. Tanisaki, “D-Modules, Perverse Sheaves, and Representation Theory”, Progress in Math., **236**, Birkhäuser, 2007.

[Hu90] J. E. Humphreys, “Reflection Groups and Coxeter Groups”, Cambridge Stud. Adv. Math., **29**, Cambridge Univ. Press, 1990.

[IS21] B. Ion, S. Sahi, “Double Affine Hecke Algebras and Congruence Groups”, Mem. Amer. Math. Soc. **1305**, Amer., Math. Soc., Providence, RI, 2021.

[KLS10] R. Koekoek, P. A. Lesky, R. F. Swarttouw, “Hypergeometric orthogonal polynomials and their q-analogues”, Springer Monographs in Math., Springer, 2010.

[K92] T. H. Koornwinder, “Askey-Wilson polynomials for root systems of type BC”, Contemp. Math., **138** (1992), 189–204.

[L89] G. Lusztig, “Affine Hecke algebras and their graded version”, J. Amer. Math. Soc., **2** (1989), 599–635.

[M72] I. G. Macdonald, “Affine root systems and Dedekind’s η-function”, Inv. Math., **15** (1972), 161–174.

[M] I. G. Macdonald, “Orthogonal polynomials associated with root systems”, preprint (1987); typed and published in the Sḿinaire Lotharingien de Combinatoire, 45 (2000), B45a; arXiv:math/0011046.

[M95] I. G. Macdonald, “Symmetric Functions and Hall polynomials”, 2nd ed., Oxford Univ. Press, 1995.

[M03] I. G. Macdonald, “Affine Hecke Algebras and Orthogonal Polynomials”, Cambridge Tracts in Math., **157**, Cambridge Univ. Press, 2003.

[M03a] I. G. Macdonald, “Formal identities for affine root systems”, Amer. Math. Soc. Transl., (2) **210** (2003), 195–211.

[N23] M. Noumi, “Macdonald Polynomials — Commuting Family of q-Difference Operators and Their Joint Eigenfunctions”, Springer Briefs in Math. Phys., Springer, 2023.

[NS04] M. Noumi, J. V. Stokman, “Askey-Wilson polynomials: an affine Hecke algebraic approach”, in: R. Alvarez-Nodarse, F. Marcellan, W. Van Assche, (eds.) “Laredo Lectures on Orthogonal Polynomials and Special Functions”, pp. 111–144. Nova Science Publishers, 2004; arXiv:math/0001033.

[Ob04] A. Oblomkov, “Double affine Hecke algebras and Calogero-Moser spaces”, Repr. Th., **8** (2004), 243–266.

[R87] S. N. M. Ruijsenaars, “Complete integrability of relativistic Calogero-Moser systems and elliptic function identities”, Commun. Math. Phys., **110**, 191–213.

[S99] S. Sahi, “Nonsymmetric Koornwinder polynomials and duality”, Ann. Math., **150** (1999), 267–282.

[SS09] Y. Saito, M. Shiota, “On Hecke algebras associated with elliptic root systems and the double affine Hecke algebras”, Publ. RIMS., **45** (2009), 845–905.

[St11] J. V. Stokman, “Macdonald-Koornwinder polynomials”, in “Encyclopedia of Special Functions: The Askey-Bateman Project: Volume 2, Multivariable Special Functions”, Cambridge Univ. Press, 2020; provisional version available from arXiv:1111.6112.

[青 13] 青本和彦, ” 直交多項式入門”, 数学書房, 2013.

[岡 06] 岡田聡一, “古典群の表現論と組み合わせ論 下”, 培風館, 2006.

[白 03] 白石潤一, “量子可積分系入門”, 臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリー **28**, サイエンス社, 2003.

[野 95] 野海正俊, “Macdonald-Koornwinder 多項式と affine Hecke 環”, 数理解析研究所講究録, **919** (1995), 44–55.

[野 97] 野海正俊 述, 長谷川浩司 記, “1997 年度東北大学集中講義講義録: アフィン Hecke 環と多変数直交多項式”; ウェブページ https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/others-j.html から入手可.

[野 16] 野海正俊 述, 渋川元樹・宮永愛子 記, “Macdonald 多項式とその周辺”, 超幾何学校 2014/15 講義録, Rokko Lecture in Mathematics **24**, 39–73, 2016; ウェブページ http://www.math.kobe-u.ac.jp/HOME/home-j/rokko.html から入手可.

[野 22] 野海正俊 述, 齋藤洋介 記, “Macdonald 多項式入門”, OCAMI Preprint Series, 22-16, 2022; ウェブページ https://www.omu.ac.jp/orp/ocami/publications/preprint-series/2022/ から入手可.

[三 04] 三町勝久, “ダイソンからマクドナルドまで —マクドナルド多項式入門—”, 代数学百科 I, 第 4 章, 朝倉書店, 2004.