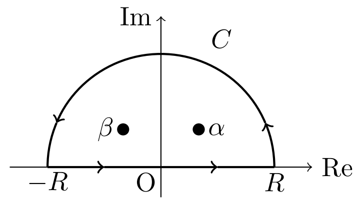
現代数学基礎 CⅢ　11 月 30 日分課題解答

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

問題. 半径 R の上半円 C と線分 $[-R, R]$ からなる, 反時計回りの向きの積分路 γ 上での複素積分 $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^2}{z^4+1}dz$ を利用して, 次の実積分を求めよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\, dx.$$

解答. $f(z) := \dfrac{z^2}{z^4+1}$ は γ 上とその内部から極を除いた所で正則だから, 留数定理が使える. R が十分大きければ, 積分路の内部にある f の極は $\alpha := e^{\pi i/4}$ と $\beta := e^{3\pi i/4}$ で, それぞれ 1 位 (右図を参照). 従って留数定理より



$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i\Big(\operatorname*{Res}_{z=\alpha} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=\beta} f(z)\Big).$$

$z = \alpha$ での留数は

$$\operatorname*{Res}_{z=\alpha} f(z) = \lim_{z\to\alpha} \frac{(z-\alpha)z^2}{z^4+1} = \frac{\big((z-\alpha)z^2\big)'}{(z^4+1)'}\bigg|_{z=\alpha} = \frac{z^2}{4z^3}\bigg|_{z=\alpha} = \frac{1}{4\alpha} = \frac{1}{4}e^{-\pi i/4}$$

と計算できる. 同様に

$$\operatorname*{Res}_{z=\beta} f(z) = \frac{1}{4\beta} = \frac{1}{4}e^{-3\pi i/4}.$$

ここで半円 C での積分は, R が十分大きければ

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \le \ell(C)\cdot \sup_{z\in C}|f(z)| = \pi R\cdot \sup_{z\in C}\frac{R^2}{|z^4+1|} = \pi R\cdot \frac{R^2}{R^4-1}$$

と評価できるので, $R\to\infty$ で $\int_C f(z)dz \to 0$. 従って求めたい積分 I は

$$I = \lim_{R\to\infty}\Big(\int_C f(z)dz + \int_{-R}^{R} f(z)dz\Big) = 2\pi i\Big(\frac{1}{4}e^{-\pi i/4} + \frac{1}{4}e^{-3\pi i/4}\Big) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

コメント. 3 点満点で採点しました. 平均点は 2.3 点でした. 留数計算, 円弧 C での積分の処理, 答えが合っているかをそれぞれ 1 点としました.

以上です.