現代数学基礎 CIII　11 月 30 日分演習問題

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
連絡先: yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2023WC3.html

問題 9.1 (講義ノート命題 9.1.3 証明)**.** $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ に対して

$$\left|e^{iz} - e^{-iz}\right| = (e^{2y} + e^{-2y} - 2\cos 2x)^{1/2}$$

となることを示せ.

問題 9.2 (講義ノート命題 9.1.4 証明)**.** $\cot z$ の $z = n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$ における極の位数と留数を求めよ.

問題 9.3 (講義ノート命題 9.2.3 証明)**.** 二つの整関数 f, g が $f'/f = g'/f$ を満たす時, $(f/g)' = 0$ であることを示せ.

解答 9.1. $e^{iz}=e^{-y}(\cos x+i\sin x)$, $e^{-iz}=e^{y}(\cos x-i\sin x)$ より

$$\begin{aligned}\left|e^{iz}-e^{-iz}\right|^2 &= \left|(e^{-y}-e^{y})\cos x+i(e^{y}+e^{-y})\sin x\right|^2=(e^{y}-e^{-y})^2\cos^2 x+(e^{y}+e^{-y})^2\sin^2 x\\ &= e^{2y}+e^{-2y}-2(\cos^2 x-\sin^2 x)=e^{2y}+e^{-2y}-2\cos 2x.\end{aligned}$$

解答 9.2. $\cot z=\frac{\cos z}{\sin z}$ であり, $\sin z$ は $z=n\pi$ に 1 位の零点を持つので, $\cot z$ は $z=n\pi$ に 1 位の極を持つ. 留数は

$$\operatorname*{Res}_{z=n\pi}\cot z=\lim_{z\to n\pi}(z-n\pi)\cot z=\lim_{z\to n\pi}\cos z\frac{z-n\pi}{\sin z}=\cos n\pi\cdot\left(\left.(\sin z)'\right|_{z=n\pi}\right)^{-1}=(\cos n\pi)^2=1.$$

解答 9.3. $(f/g)'=(f'g-fg')/g^2=((f'/f)fg-fg(g'/g))/g^2=(f'/f-g'/g)f/g=0.$