§9 函数の(大域的)表示

§9.1. 部分分数展開

Thm. 9.1.2. f: $\mathbb{C}$上の有理型函数 ($\Rightarrow$ 特異点は極のみ)

$A = \{a_n \mid n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$: fの極の集合

$0 \leqq |a_1| \leqq |a_2| \leqq \cdots$ と並べる.

仮定 • 極の位数は全て1位, $a_1 \neq 0$ ($\Leftrightarrow 0 \notin A$)

• $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$

• $\exists \{R_k \mid k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$, $\lim_{k\to\infty} R_k = \infty$

$C_k := \{z \in \mathbb{C} ; |z| = R_k\}$ $C_k \cap A = \phi$

• $\exists M$, $\forall k \in \mathbb{N}$. $\forall z \in C_k$ $|f(z)| < M$.

$$\Rightarrow \underset{\forall z \in \mathbb{C}\setminus A}{f(z)} = f(0) + \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{a_k \in A \\ |a_k| < R_n}} \left(\operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z)\right) \cdot \left(\frac{1}{z-a_k} + \frac{1}{a_k}\right)$$

右辺は広義一様収束 □

Prp. 9.1.3. $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}\pi$. 右辺は広義一様収束

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + \sum_{n \neq 0} \frac{(-1)^n}{z - n\pi} \qquad \lim_{k\to\infty} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ 0 < |n| < k}}$$

(:) $f(z) := \frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z}$ に Thm. を適用したい…

fの特異点 : $z = 0$ は除去可能. $\lim_{z\to 0} f(z) = 0$

$$\left[\begin{aligned} f(z) &= (z \cdot \sin z)^{-1} \cdot (z - \sin z) \\ &= \left(z \cdot \left(z - \tfrac{1}{3!}z^3 + \cdots\right)\right)^{-1} \cdot \left(z - \left(z - \tfrac{1}{3!}z^3 + \cdots\right)\right) \\ &= (z^2 \cdots)^{-1} \cdot \left(\tfrac{1}{3!}z^3 + \cdots\right) = z + \cdots \\ &\xrightarrow[z\to 0]{} 0 \end{aligned}\right.$$

: $z = m\pi$, $m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$: 極. 1位.

Cor. 7.2.4.

$$\operatorname*{Res}_{z=m\pi} f(z) = \operatorname*{Res}_{z=m\pi} \frac{1}{\sin z} \overset{\text{Cor. 7.2.4.}}{=} \lim_{z\to m\pi} \frac{z - m\pi}{\sin z}$$

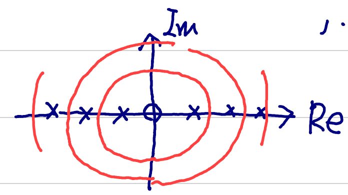
$$= \left((\sin z)' \Big|_{z=m\pi}\right)^{-1} = (\cos m\pi)^{-1}$$

$$= (-1)^m$$

: $A = \{m\pi \mid m \neq 0\}$ は $\mathbb{C}$に集積点を持たない.

$\Rightarrow$ fは$\mathbb{C}$上有理型. 極は全て1位.

- $a_1=\pi,\ a_2=-\pi,\ a_3=2\pi,\ a_4=-2\pi,\ \dots,\ a_{2n-1}=n\pi,\ a_{2n}=-n\pi,\ \dots$
  $\Rightarrow a_i \neq 0,\ \lim_{n\to\infty}|a_n|=\infty$
- $R_k := (k+\frac{1}{2})\pi \Rightarrow \lim_{k\to\infty}R_k=\infty,\ C_k\cap A=\phi$



- $|f(z)| \leqq |(\sin z)^{-1}|+|z^{-1}| = |\sin z|^{-1}+|z|^{-1}$
  $z\in C_k \Rightarrow |z|^{-1}=((k+\frac{1}{2})\pi)^{-1} < (\frac{\pi}{2})^{-1}=2/\pi$
  $|\sin z|^2=\frac{1}{2}|e^{iz}-e^{-iz}|$ $\quad z=x+iy$
  問9.1. → $=\frac{1}{2}\cdot(e^{2y}+e^{-2y}-2\cos 2x)^{1/2}$

$1\gg\delta>0$ を固定. $z=x+iy\in C_k$.

$|y|\geqq\delta$ なら $|\sin z|^{-1}\leqq 2/(e^{2y}+e^{-2y}-2)^{1/2}=2/|e^{y}-e^{-y}|$
$\leqq 2/(e^{\delta}-e^{-\delta})$

$|y|\leqq\delta$ なら $R_k^2-\delta^2\leqq x^2\leqq R_k^2$
$1\gg\delta$ より $(k+\frac{1}{4})\pi\leqq|x|\leqq(k+\frac{1}{2})\pi$ $\quad\therefore \cos 2x\leqq 0.$
$\therefore\ |\sin z|^{-1}\leqq 2/(e^{2y}+e^{-2y})^{1/2}$
$\leqq 2/\sqrt{2}=\sqrt{2}$

$\therefore M>\frac{2}{\pi}+\max\{2/(e^{\delta}-e^{-\delta}),\sqrt{2}\}$ なら $\forall k\ \forall z\in C_k\ |f(z)|<M$

$\Rightarrow$ $f(z)$ に Thm. 9.1.2. が適用できて

$$\frac{1}{\sin z}-\frac{1}{z}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[(-1)^k\left(\frac{1}{z-k\pi}+\frac{1}{k\pi}\right)+(-1)^k\left(\frac{1}{z+k\pi}-\frac{1}{k\pi}\right)\right]$$

□

Thm の証明: $D_k:=D(0,R_k)$: 開円板, $\partial D_k=C_k$.
$A\cap D_k=\{a_1,\dots,a_{N(k)}\}$. $\quad z\in D_k\setminus A$
$f(w)/(w-z)$ に留数定理:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_k^+}\frac{f(w)}{w-z}dw=\operatorname*{Res}_{w=z}\frac{f(w)}{w-z}+\sum_{j=1}^{N(k)}\operatorname*{Res}_{w=a_j}\frac{f(w)}{w-z}$$

$$=f(z)+\sum_{j=1}^{N(k)}\frac{1}{a_j-z}\operatorname{Res}_{w=a_j}f(w)$$

一方で $\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w} + \frac{z}{w(w-z)}$ から

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_k^+}\frac{f(w)}{w-z}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_k^+}\frac{f(w)}{w}dw + \frac{z}{2\pi i}\int_{C_k^+}\frac{f(w)}{w(w-z)}dw$$

$$= f(0) + \sum_{j=1}^{N(k)} \frac{1}{a_j}\operatorname*{Res}_{w=a_j} f(w) + \frac{z}{2\pi i}\int_{C_k^+}\frac{f(w)}{w(w-z)}dw$$

よって $f(z) = f(0) + \sum_{j=1}^{N(k)}\left(\frac{1}{z-a_j}+\frac{1}{a_j}\right)\cdot \operatorname*{Res}_{w=a_j} f(w) + \frac{z}{2\pi i}\int_{C_k^+}$ 〃 dw.
(*)

ここで

$$\left|\frac{z}{2\pi i}\int_{C_k^+}\frac{f(w)}{w(w-z)}dw\right| \le \frac{|z|}{2\pi}\cdot 2\pi R_k \cdot \sup\left\{\left|\frac{f(w)}{w(w-z)}\right| ; w\in C_k\right\}$$

$$= |z|R_k \cdot M/R_k(R_k-|z|) = \frac{M|z|}{R_k-|z|}$$

$k\to\infty$ で $M|z|/(R_k-|z|)\to 0$.　∴ (*) → 主張の等式. $\forall z\in\mathbb{C}\setminus A$

また. $\forall k$,　$\forall z \in \mathbb{C}\setminus A$, $0<\forall b<R_k$

$|z|<b \Rightarrow M|z|/(R_k-|z|) < Mb/(R-b)$

より. (*)の右辺は $D_k\setminus A$ 上一様収束.

$\forall k$ なので 〃 $\mathbb{C}\setminus A$ 〃 □

Prop. 9.1.4. $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}\pi$ 上で　　右辺は広義一様収束

$\lim_{k\to\infty}\sum_{\substack{-k\le n\le k\\ n\ne 0}}$

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{n\ne 0}\frac{1}{z-n\pi} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2\pi^2}$$ 問9.2.

(∵) $f(z)=\cot z - \frac{1}{z}$ の特異点は $\begin{cases} z=0 : \text{除去可能}, \lim f(z)=0. \\ z=n\pi, n\ne 0 : \text{1位の極}, \text{留数は1}. \end{cases}$

$R_k := (k+\frac{1}{2})\pi$. C_k 上で $|f(z)|\le|\cot z| + |z|^{-1} \le |\cot z| + ((k+\frac{1}{2})\pi)^{-1}$

$|\cot z|^2 = |\cot^2 z| = \left|\frac{1-\sin^2 z}{\sin^2 z}\right| \le |\sin z|^{-2}+1$

Prop.9.1.3.の証明から. $|\cot z|^2 \le M^2+1$.　残りは同様. □

$\lim_{k\to\infty}\sum_{n=-k}^{k}$

Cor. 9.1.5. $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}\pi$ 上で $\frac{1}{\sin^2 z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-n\pi)^2}$　広義一様収束

(∵) Prop.9.1.4. の両辺を微分して −1倍. 右辺は項別微分できる. □

§9.2. 無限積表示

Dfn. $a_n \in \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{N})$: $\prod_{n=0}^{\infty}(1+a_n)$が収束 :$\Longleftrightarrow$
$\exists \lim_{N\to\infty} \prod_{n=0}^{N}(1+a_n) \in \mathbb{C}$ □

Lem. 9.2.1. $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$が収束 $\Rightarrow$ $\prod_{n=0}^{\infty}(1+a_n)$は収束 □

(∵) $\mathrm{Log}(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}z^k/k$, $1+z = \exp(\mathrm{Log}(1+z))$

∴ $B_N := \prod_{n=0}^{N}(1+a_n) = \exp L_N$, $L_N := \sum_{n=0}^{N}\mathrm{Log}(1+a_n)$

$|z|<\frac{1}{2}$なら $|\mathrm{Log}(1+z)| \leq |z| + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}|z|^k \leq |z| + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}|z|^k$
$\leq |z| + |z|^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-|z|} \leq |z| + |z|^2 \leq 2|z|$

仮定から $\exists M \in \mathbb{N}$, $n>M \Rightarrow |a_n| < 1/2$., ∴ $|\mathrm{Log}(1+a_n)| \leq 2|a_n|$

∴ $|L_N| \leq \sum_{n=0}^{M}|\mathrm{Log}(1+a_n)| + 2\cdot\sum_{n=M+1}^{N}|a_n|$

$N\to\infty$として、仮定から L_Nは絶対収束. ∴ $\exists \lim_{N\to\infty} B_N = \lim_{N\to\infty}\exp(L_N)$ □

Thm. 9.2.2. $U \subset \mathbb{C}$: 開, $F_n : U \to \mathbb{C}$, 正則. $(n \in \mathbb{N})$
$c_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$が収束. $\forall z \in U$ $|F_n(z)-1| < c_n$
(1) $\prod_{n=0}^{\infty} F_n(z)$は U上一様に収束し、収束先$F(z)$は正則.
(2) $z \in U$. $\forall n \in \mathbb{N}$ $F_n(z) \neq 0 \Rightarrow \frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n'(z)}{F_n(z)}$ □

Prp. 9.2.3. $\forall z \in \mathbb{C}$ $\sin z = z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$. 右辺は$\mathbb{C}$上広義一様収束

(∵) $F_n(z) = 1 - z^2/n^2\pi^2$. $(n \geq 1)$
$R>0$ 固定. $c_n := R^2/n^2\pi^2$. $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$は収束.
$\forall z \in \mathbb{C}$, $|z|<R \Rightarrow |F_n(z)-1| < c_n$
Thm.(1)より $\prod_{n=1}^{\infty}F_n(z)$は $|z|<R$で一様収束. ∴ $\mathbb{C}$上広義一様収束
$f(z) :=$ (右辺) は整函数の広義一様収束先なので整函数 (∵ Thm.6.5.2)
Thm.(2)より ($z \notin \mathbb{Z}\pi$で) $f'(z)/f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2\pi^2}$ (*)
Prp.9.1.4.より (*) $= \cot z$. 一方 $g(z) := \sin z$ も $g'(z)/g(z) = \cot z$.
∴ $f'/f = g'/g$. ∴ $(f/g)' = 0$ ∴ $f/g = c$ (定数). □

問9.3 ⟶ $1 = \lim_{z\to0}\frac{\sin z}{z} = \lim\frac{f(z)}{z} = \lim\frac{c\cdot g(z)}{z} = c\cdot\lim\frac{\sin z}{z} = c$.