現代数学基礎 CⅢ　11 月 16 日分課題解答

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

問題. 関数 $f(z) := \dfrac{\cot z}{z} = \dfrac{\cos z}{z \sin z}$ の全ての極を求め, その位数と留数を答えよ.

解答. 分母 $z \sin z$ の零点は $z = n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$. 分子 $\cos z$ の零点は $z = (n + \frac{1}{2})\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$ で, 分母の零点と重なることはない. よって $f(z)$ の極は $z = n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$. $n = 0$ か否かで状況が違う.

(1) $z = n\pi$, $n \neq 0$ について. 分母 $z \sin z$ の零点としての位数が 1 位なので, $f(z)$ の極としては位数は 1. 留数は

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=n\pi} f(z) &= \lim_{z \to n\pi} (z - n\pi) f(z) = \lim_{z \to n\pi} \frac{\cos z}{z} \frac{z - n\pi}{\sin z} = \frac{\cos n\pi}{n\pi} \cdot \left. \frac{1}{(\sin z)'} \right|_{z=n\pi} \\
&= \frac{\cos n\pi}{n\pi} \frac{1}{\cos n\pi} = \frac{1}{n\pi}.
\end{aligned}$$

(2) $z = 0$ について. 分母 $z \sin z$ の零点としての位数が 2 位なので, $f(z)$ の極としては位数は 2. 留数は

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz} \Big(z^2 f(z) \Big) = \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz} \frac{z \cos z}{\sin z} = \lim_{z \to 0} \frac{\sin z \cos z - z}{\sin^2 z}$$

分母と分子の極限が共に 0 だから, l'Hôpital の定理より

$$= \lim_{z \to 0} \frac{(\cos^2 z - \sin^2 z) - 1}{2 \sin z \cos z} = \lim_{z \to 0} \frac{\cos 2z - 1}{\sin 2z}$$

再び l'Hôpital の定理より

$$= \lim_{z \to m\pi} -\frac{2 \sin 2z}{2 \cos 2z} = 0.$$

コメント. 3 点満点で採点しました. $z = 0$ と $z = n\pi$ をそれぞれ 1.5 点ずつとし, それぞれの極について位数を 0.5 点, 留数を 1 点として採点しました. 平均点は 1.6 点でした.

基本的な問題なので, 必ずできるようにして下さい.

l'Hôpital (ロピタル) の定理を 2 回使わなくても, 分母と分子を Taylor 展開して $\sin z \cos z - z = O(z^3)$, $\sin^2 z = z^2$ となるので $\lim_{z \to 0} \frac{\sin z \cos z - z}{\sin^2 z} = 0$ だと分かります.

なお, l'Hôpital の定理は Bernoulli が発見したものだそうです. 興味がある人はウィキペディアの該当項目を見て下さい.

以上です.