

## 現代数学基礎 CIII 11月16日分演習問題

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)

連絡先: yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

<https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2023WC3.html>

問題 8.1 (講義ノート問題 8.1.2 (1)).  $\int_{|z|=2} \frac{2z-1}{z^2-z} dz$  を求めよ. 但し積分路は正の向きの円とする.

問題 8.2 (講義ノート例 8.1.3, 問題 8.1.3). 実数  $a > 1$  に対し  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \cos \theta} d\theta$  を複素積分を用いて求めよ.

問題 8.3 (講義ノート例 8.1.4, 問題 8.1.5).  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$  を複素積分を用いて求めよ.

問題 8.4 (講義ノート例 8.1.4, 問題 8.1.11).  $n \in \mathbb{N}$  に対し  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} dx$  を複素積分を用いて求めよ.

問題 8.5 (講義ノート問題 8.2.1 (1)).  $U \subset \mathbb{C}$  を開集合,  $f, g: U \rightarrow \mathbb{C}$  を正則関数とし,  $C = \partial D$  を円であって  $C$  上  $f \neq 0$  となるものとする.  $f$  が  $D$  で相異なる零点  $a_1, \dots, a_n$  を持つ時, 次が成立することを示せ.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C g(w) \frac{f'(w)}{f(w)} dw = \sum_{k=1}^n \text{ord}_f(a_k) g(a_k).$$

問題 8.6 (講義ノート問題 8.2.1 (2)).  $U$  と  $g$  は前問と同じとし,  $C = \partial D$  を円であって  $\mathbb{Z}$  と交わらないものとする. この時, 次が成立することを示せ.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C g(w) \cot \pi w dw = \sum_{k \in D \cap \mathbb{Z}} g(k).$$

問題 8.7 (講義ノート問題 8.2.2 (1)). 方程式  $e^z = 2z + 1$  が  $|z| < 1$  に一つだけ解を持つことを示せ.

解答は講義ノートの該当箇所を見て下さい.