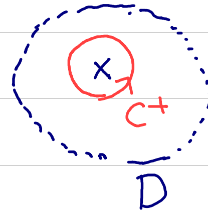
§8 留数定理

§8.1.

Thm. 8.1. $D \subset \mathbb{C}$: 開円板. $z_0 \in D$

$f : \overline{D} \setminus \{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C}$: 正則. z_0 が極

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D^+} f(z)\,dz$$

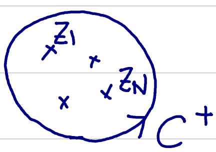


∵ $z = z_0$ 中心の Laurent 展開 $f(z) = \dfrac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \cdots + \dfrac{a_{-1}}{z-z_0} + (\text{正則})$

$C^+ := \partial D(z_0, \varepsilon)^+$, $0 < \varepsilon \ll 1$. Cauchy の積分定理より

$$\int_{\partial D^+} f(z)\,dz = \int_{C^+} f(z)\,dz = \int_{C^+} \sum_{k=1}^{m} \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k}\,dz$$
$$= \sum_{k=1} a_{-k}\cdot\delta_{k,1}\cdot 2\pi i = 2\pi i\cdot a_{-1} \qquad \square$$

Cor. 8.2.



C : 円. $z_1, \ldots, z_N \in (C \text{ の内部}) =: D$

f : $\overline{D}$ を含む開集合上, $z_1, \ldots, z_N$ 以外で正則.

$z_1, \ldots, z_N$ は極.

$$\Rightarrow \int_{C^+} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)$$

∵ $0 < \varepsilon \ll 1$. $C_k^+ := \partial D(z_0, \varepsilon)^+$

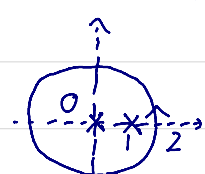
Cauchy の積分定理より $\displaystyle\int_{C^+} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{N} \int_{C_k^+} f(z)\,dz$ $\square$

Rmk. Cor. は C を単純閉曲線に取りかえても成立. : 留数定理

問1. (問8.1.2(1))

$$I := \int_{|z|=2} \frac{2z-1}{z^2-z}\,dz$$

正の向き.



$f(z) := \dfrac{2z-1}{z^2-z} = \dfrac{1}{z-1} + \dfrac{1}{z}$: 積分路の内部 $|z|<2$ に, $z = 0, 1$ の極.

$$\therefore\ I = 2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=1} f(z)\right) = 2\pi i(1+1) = 4\pi i$$

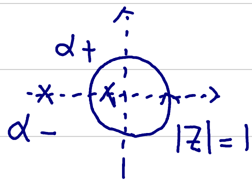
$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{z-1} = 0, \quad \operatorname*{Res}_{z=1} \frac{1}{z-1} = 1$$

問2 (Eg.8.1.3, 問8.1.3.)

$a>1.$ $\quad I := \int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\cos\theta}\, d\theta$

$z = e^{i\theta}.$ $\quad I = \int_{|z|=1} \left(a+(z+z^{-1})/2\right)^{-1} \cdot \frac{dz}{iz}$

$dz = iz\, d\theta$ $\quad = \int_{|z|=1} (-2i)/(z^2+2az+1) \cdot dz$



極は $z = \alpha\pm := -a \pm \sqrt{a^2-1}$ $\quad \alpha_- < -a < -1 < \alpha_+ < 0$

α_+ のみ積分路の内側. $\quad \alpha_+ = -a+\sqrt{a^2-1} = \frac{-1}{a+\sqrt{a^2-1}}$

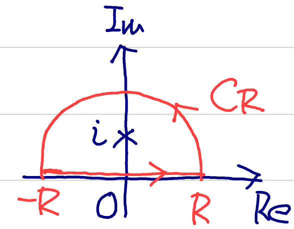
$\therefore I = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}_{z=\alpha_+} \frac{-2i}{(z-\alpha_+)(z-\alpha_-)} = 4\pi \cdot \frac{1}{\alpha_+-\alpha_-} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$

$\left|\frac{z-\alpha_-}{\alpha_+-\alpha_-}\right| < 1$

$\frac{1}{(z-\alpha_+)(z-\alpha_-)} = \frac{1}{z-\alpha_+}\left(z-\alpha_++\alpha_+-\alpha_-\right)^{-1} = \frac{1}{z-\alpha_+}\cdot\frac{1}{\alpha_+-\alpha_-}\left(1+\frac{z-\alpha_+}{\alpha_+-\alpha_-}\right)^{-1} = \frac{1}{z-\alpha_+}\frac{1}{\alpha_+-\alpha_-}(1+\cdots)$

問3 (Eg.8.1.4, 問8.1.5)

$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$



$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$: $z = \pm i$ に1位の極

右図の積分路について.

$(\ast)$ $\int_{C_R} f(z)dz + \int_{-R}^{R} f(x)dx = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}_{z=i} f(z) = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}_{z=i} \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{2\pi i}{2i} = \pi.$

$R>1$ なら, C_R 上で $\left|\frac{1}{1+z^2}\right| \le \frac{1}{R^2-1}.$ $\quad \therefore \left|\int_{C_R} f(z)dz\right| \le \pi R \frac{1}{R^2-1} \xrightarrow{R\to\infty} 0$

$(\ast)$ で $R\to\infty$ として. $\quad 0 + I = \pi$ $\quad \therefore I = \pi.$ $\quad \square$

問4 (問8.1.11)

$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}\, dx, \quad n \in \mathbb{N}.$

$f(z) := \frac{1}{(1+z^2)^{n+1}}$: $z=\pm i$ に $(n+1)$ 位の極, 前と同じ積分路を用いて

$(\ast)$ $\int_{C_R} + \int_{-R}^{R} = 2\pi i\, \mathrm{Res}_{z=i} f(z)$

Cor.7.2.4. から $\mathrm{Res}_{z=i} f(z) = \frac{1}{n!} \partial_z^n \left((z-i)^{n+1} f(z)\right)\Big|_{z=i} = \frac{1}{n!} \partial_z^n (z+i)^{-(n+1)}\Big|_{z=i}$

$= \frac{1}{n!} (-1)^n \cdot (n+1) \cdots (2n) \cdot (z+i)^{-(2n+1)}\Big|_{z=i} = \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n \cdot 2i}$

$R>1$ なら C_R 上 $\left|\frac{1}{(1+z^2)^{n+1}}\right| \le \frac{1}{(R^2-1)^{n+1}}$ $\quad \therefore \left|\int_{C_R} f(z)dz\right| \le \frac{\pi R}{(R^2-1)^{n+1}} \xrightarrow{R\to\infty} 0$

$(\ast)$ で $R\to\infty$ として. $\quad 0 + I = \binom{2n}{n} \cdot \frac{\pi}{4^n} = \pi \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ $\quad \square$

§8.2 偏角の原理

f:函数, $z\in\mathbb{C}$: fの零点又は極. $\mathrm{ord} f(z) :=$ (零点又は極の)位数

$U\subset\mathbb{C}$, (Uでの零点の数) $:= \sum_{z:U上の相異なるfの零点} \mathrm{ord} f(z)$

(〃 極) $:= \sum_{z:}$ 〃 — 極 $\mathrm{ord} f(z)$

Eg. $f(z)=a_nz^n+\cdots+a_0\in\mathbb{C}[z]$, $a_n\neq 0 \Rightarrow$ ($\mathbb{C}$でのfの零点の数) $=n$.

代数学の基本定理

Thm. 8.2.1. $U\subset\mathbb{C}$:開. f: U上の有理型函数 ($\Rightarrow$特異点は極のみ) 6.2.2.

$C\subset U$:円 C上にfの零点, 極はない.

偏角の原理

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_{C^+}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = Z-P$$

$Z :=$ Cの内部での零点の数

$P :=$ 〃 極 〃

↑正の向き. $f'(z)/f(z) = \partial_z(\log f)$

∵ f'/fの極はfの零点又は極.

fが$z=z_0$でn位の零点: z_0の近傍で$f(z)=(z-z_0)^n g(z)$, g:正則, $g(z_0)\neq 0$

$f'(z)/f(z) = \frac{n}{z-z_0}+g'(z)/g(z)$. は$z=z_0$で1位の極

$\therefore \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(z_0,\varepsilon)^+}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = n$ ↑$z=z_0$で正則

fが$z=z_0$でn位の極: z_0の近傍で$f(z)=g(z)/(z-z_0)^n$, g:正則, $g(z_0)\neq 0$

$f'(z)/f(z) = \frac{-n}{z-z_0}+g'(z)/g(z)$. $\therefore \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D^+(z_0,\varepsilon)}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = -n$

あとは留数定理より. □

Rmk. (1) C^+を単純閉曲線にしても成立.

(2) 名前の由来: $f'(z)/f(z)\cdot dz = d(\log f(z)) = d(\log|f(z)|) + i\,d(\arg f(z))$

より $\frac{1}{2\pi i}\int_{C^+} = \frac{1}{2\pi}\int_{C^+} d(\arg f(z))$ … $f(z)$の偏角の変化量 □

Thm. 8.2.2. $U\subset\mathbb{C}$:開, $f,g: U\to\mathbb{C}$, 正則. $D\subset U$:閉円板

$\forall z\in\partial D$, $|f(z)|>|g(z)|>0 \Rightarrow$ (D でのf+gの零点の数)

Rouchéの定理 $\partial D =: C$ $=$ (〃 f 〃)

∵ $t\in[0,1]\subset\mathbb{R}$. $f_t(z) := f(z)+t\cdot g(z)$. $N_t :=$ (Cの内部でのf_tの零点の数) $\in\mathbb{N}$

仮定よりf_tはC上で零点を持たない. $\therefore N_t = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^+}\frac{f_t'(z)}{f_t(z)}dz$. ∵tの連続函数. □

Thm. (開写像定理) $\Omega \subset \mathbb{C}$: 領域. $f: \Omega \to \mathbb{C}$, 正則, 定数ではない.
8.2.4. $\Rightarrow f$ は開写像. ($:\Leftrightarrow {}^\forall U \subset \Omega$: 開, $f(U) \subset \mathbb{C}$: 開)

∵ $f(U) \ni w_0 = f(z_0)$ を一つ取る. ${}^\exists \varepsilon > 0$, $D(w_0, \varepsilon) \subset f(U)$ を示したい.
$w \in \mathbb{C}$ に対し, $g(z) := f(z) - w$ を
$g(z) = F(z) + G(z)$, $F(z) := f(z) - w_0$, $G(z) := w_0 - w$ と分解.
${}^\exists \delta > 0$, $D := D(z_0, \delta) \subset U$, ${}^\forall z \in \overline{D} \setminus \{z_0\}$ $f(z) \neq w_0$ (∵ f は Ω 上非定数)
${}^\exists \varepsilon > 0$. ${}^\forall z \in \partial D$, $|f(z) - w_0| \geqq \varepsilon$. (∵ ∂D は有界閉)
${}^\forall w \in D(w_0, \varepsilon)$, ${}^\forall z \in \partial D$, $|F(z)| \geqq \varepsilon > |G(z)|$
Rouchéの定理8.2.2. より $g = F + G$ と F の D での零点の数は等しい.
$F(z)$ の零点は $z = z_0$ のみ. ∴ $g(z) = f(z) - w$ も1つだけ D に零点を持つ
∴ $w = f(z) \in f(D) \subset f(U)$ ∴ $D(w_0, \varepsilon) \subset f(U)$ □

Thm. (最大値原理) $\Omega \subset \mathbb{C}$: 領域. $f: \Omega \to \mathbb{C}$, 正則, 非定数
8.2.5 $\Rightarrow \nexists \max\{|f(z)| ; z \in \Omega\}$

∵ $z_0 \in \Omega$ で $|f|$ が最大値を取るなら, $z_0 \in {}^\forall D \subset \Omega$: 開円板
Thm. 8.2.4. より $f(z_0) \in f(D) \subset \mathbb{C}$ は開. ∴ ${}^\exists z \in D$, $|f(z)| > |f(z_0)|$ □

問5. $U \subset \mathbb{C}$: 開, $f, g: U \to \mathbb{C}$: 正則, $\overline{D} \subset U$: 閉円板, $C = \partial D$ 上 $f \neq 0$
(8.2.1.(1)) $a_1, \dots, a_n$: D にある f の相異なる零点.
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C+} g(w) \frac{f'(w)}{f(w)} dw = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{ord} f(a_k) \cdot g(a_k)$$

問6. $U, g, \overline{D}$: 同上 $C = \partial D \subset U$: 円, $\mathbb{Z}$ と交わらない
(8.2.1.(2))
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C+} g(w) \cot w \, dw = \sum_{k \in D \cap \mathbb{Z}} g(k)$$

問7. $e^z = 2z + 1$ は $|z| < 1$ に1つだけ解を持つ.
(8.2.2.(1)) ∵ $f(z) = -z$, $g(z) = e^z - z - 1$. $\Rightarrow |g| \leqq e - 2 < |f|$ for $|z| = 1$