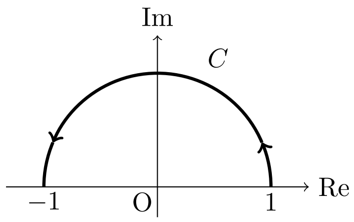
現代数学基礎 CⅢ　11 月 09 日分課題解答

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

問題. 次の複素積分 I の値を求め, 実部と虚部を分けて表示せよ.

$$I := \int_C z^{1/n} dz.$$

但し n は正の整数であり, また C は単位円 $|z| = 1$ の上半分に正の向きを入れた積分路である (下図参照). そして冪関数 $z^{1/n}$ の分岐は, $z = 1$ で $z^{1/n}$ の偏角が 0 になるものとする.



解答. C のパラメータ表示 $z = e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le \pi$ を使って

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi e^{i\theta/n} \cdot ie^{i\theta} d\theta = \left[\frac{e^{i(1+1/n)\theta}}{1+1/n} \right]_0^\pi = \frac{n}{1+n}\bigl(e^{i(1+1/n)\pi} - 1\bigr) \\ &= \frac{-n}{1+n}\bigl(e^{i\pi/n} + 1\bigr) = \frac{-n}{1+n}\bigl(\cos\tfrac{\pi}{n} + 1 + i\sin\tfrac{\pi}{n}\bigr). \end{aligned}$$

コメント. 3 点満点で採点しました. 平均点は 2.4 点でした.

積分路を延長して閉曲線にして, Cauchy の積分定理を使おうとしている答案がありましたが, 非積分関数が原点で定義されていないので, 定理が使えません. また $e^{i\pi/n}$ の部分を $(-1)^{1/n}$ と書いてしまうと, 実部・虚部および分岐の取り方が不明です.