現代数学基礎 CIII　11 月 09 日分演習問題

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
連絡先: yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2023WC3.html

問題 7.1 (講義ノート問題 7.1.1)**.** $z = 0$ が関数 $f(z) := \exp(1/z)$ の真性特異点であることを示せ.

問題 7.2 (講義ノート問題 7.1.2)**.** 以下の関数の孤立特異点を全て求め, 種類を判定し, 極の位数を求めよ.

(1) $\dfrac{\sin(z^2)}{z^4}$.　(2) $\dfrac{\sin(z^2)}{z^5}$.　(3) $\dfrac{z^4 - 1}{z^3 - 1}$.

問題 7.3 (講義ノート問題 7.2.3, 7.2.4)**.** 以下の関数を括弧内の点を中心にして Laurent 展開せよ.

(1) $\dfrac{2z}{z^2+1}$ $[z = i]$.　(2) $\dfrac{\sin z}{z^2}$ $[z = 0]$.　(3) $ze^{1/z}$ $[z = 0]$.

解答 7.1. z が $z \in \mathbb{R}_{>0}$ のまま 0 に近づくときは $\exp(1/z) \to \infty$. 一方 z が $z \in \mathbb{R}_{<0}$ のまま 0 に近づくときは $\exp(1/z) \to 0$. 従って $z = 0$ は除去可能な特異点でも極でもないので, 真性特異点である.

解答 7.2. (1) $z = 0$ での Taylor 展開 $\sin z = z + O(z^3)$ から $z^{-4}\sin(z^2) = z^{-2} + O(z)$ なので, $z = 0$ は 2 位の極.

(2) 同様に $z^{-2}\sin(z^3) = z^{-2}(z^3 + O(z^9))$ なので, $z = 0$ は除去可能特異点.

(3) $z = 1$ は除去可能特異点で, 除去すると $f(z) = \frac{z^3+z^2+z+1}{z^2+z+1}$. よって $z = \exp(\pm 2\pi i/3)$ は 1 位の極.

解答 7.3. (1) Taylor 展開を利用して $(\sin z)/z^2 = z^{-2}\sum_{n\geq 0}(-1)^n z^{2n+1}/(2n+1)! = z^{-1} + \sum_{n\geq 1}(-1)^n z^{2n-1}/(2n+1)!$.

(2) Taylor 展開を利用して $ze^{1/z} = z\sum_{n\geq 0} 1/(n!z^n) = z + \sum_{n\geq 1}(n!)^{-1}z^{-n+1}$.

(3) $z = i$ 中心で半径 $|i - (-i)| = 2$ の円の内外で場合分けする. $|z - i| < 2$ の場合は

$$\frac{2z}{z^2+1} = \frac{1}{z-i} + \frac{1}{2i+(z-i)} = \frac{1}{z-i} + \frac{1}{2i}\sum_{n\geq 0}\Big(-\frac{z-i}{2i}\Big)^n = \frac{1}{z-i} + \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2i)^{n+1}}(z-i)^n.$$

$|z - i| > 2$ の場合は

$$\frac{2z}{z^2+1} = \frac{1}{z-i} + \frac{1}{2i+(z-i)} = \frac{1}{z-i} + \frac{1}{z-i}\sum_{n\geq 0}\Big(\frac{-2i}{z-i}\Big)^n = \frac{1}{z-i} + \sum_{n\geq 0}\frac{(-2i)^n}{(z-i)^{n+1}}.$$