§7 有理型函数

11.9.1

§7.1. 孤立特異点

☆アンケート

定. $a \in \mathbb{C}$ が函数 f の孤立特異点
$:\Leftrightarrow \exists U \ni a$, 開, $U \setminus \{a\}$ で f は定義されていて, a では f は定義されない.

E.g. $f(z) = 1/z$, $a = 0$.

定. $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty :\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{z_n} = 0$. $\lim_{z\to a} f(z) = \infty :\Leftrightarrow \lim_{z\to a} \frac{1}{f(z)} = 0$

Dfn. $U \subset \mathbb{C}$: 開, $a \in U$. $f: U\setminus\{a\} \to \mathbb{C}$, 正則,
a は f の孤立特異点

(1) a が f の除去可能特異点 $:\Leftrightarrow \exists \lim_{z\to a} f(z) \in \mathbb{C}$

(2) 〃 極 $:\Leftrightarrow \lim_{z\to a} f(z) = \infty$

(3) 〃 真性特異点 $:\Leftrightarrow$ (1) と (2) 以外. □

E.g. (1) $f(z) = z^{-1}\sin z$, $a = 0$. $\lim_{z\to 0} f(z) = 1 \in \mathbb{C}$

(2) 有理式 $f(z) = p(z)/q(z)$ の分母の零点 $q(a) = 0$ は極.

(3) $f(z) = \exp(z^{-1})$, $a = 0$ は真性特異点. :問1 □

Thm. 7.1.2. (Riemann の除去可能定理).
$a \in U$ が $f: U\setminus\{a\} \to \mathbb{C}$, 正則, の除去可能特異点
$\Rightarrow \alpha := \lim_{z\to a} f(z) \in \mathbb{C}$, $f(a) := \alpha$ とすれば
$f: U \to \mathbb{C}$ は正則. □

Thm. 7.1.3. (Casorati-Weierstrass) $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$. $D^*(a,r) := D(a,r) \setminus \{a\}$ ←穴あき開円板
$f: D^*(a,r) \to \mathbb{C}$, 正則. a は f の真性特異点
$\Rightarrow$ 像 $f(D^*(a,r)) \subset \mathbb{C}$ は稠密. □

$S \subset \mathbb{C}$ が稠密 $:\Leftrightarrow \forall z \in \mathbb{C}, \forall r > 0, S \cap D(z,r) \neq \phi$

e.g. $S := \mathbb{Q} + i\mathbb{Q} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$
$\subset \mathbb{C}$ は稠密.

Thm. 7.1.4. $V \subset \mathbb{C}$: 開. $f: V \to \mathbb{C}$: 正則. $f \not\equiv 0$
$c \in V$, $f(c) = 0$.
$\Rightarrow c \in \exists U \subset V$: 開, $\exists n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\exists g: U \to \mathbb{C}$, 正則, 零点を持たない
s.t. $f(z) = (z-c)^n g(z)$.
更に n と g は一意に定まる.

(証) Taylor展開 (Thm.6.1.2) より. $c \in {}^{\exists}U \subset \mathbb{C}$, 開,
$\forall z \in U$. $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-c)^k$.
$f(c)=0$, $f \neq 0$ より. $n := \min\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \neq 0\} \in \mathbb{Z}_{>0}$
そして $f(z) = (z-c)^n \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k} (z-c)^k$.
$= (z-c)^n g(z)$, $g(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k} (z-c)^k$.
gはU上正則, $a_n \neq 0$より zがcに十分近ければ $g(z) \neq 0$.
一意性: $f(z) = (z-c)^n g(z) = (z-c)^m h(z)$,
$m>n$なら $g(z) = (z-c)^{m-n} h(z)$ で $g(c)=0$.
$m<n$なら $h(c)=0$. $\square$

Cor. 正則函数の零点は孤立してる.

Dfn. nを零点cの位数と呼ぶ.

Thm. 7.1.5. 函数fの極$c \in \mathbb{C}$に対し,
$c \in {}^{\exists}U \subset \mathbb{C}$, 開, ${}^{\exists}h$: U上正則で零点を持たない. ${}^{\exists}n \in \mathbb{Z}_{>0}$
s.t. $f(z) = (z-c)^{-n} h(z)$.

(証) Thm.7.1.4. を $1/f$ に適用. $\square$

Dfn. nを極cの位数と呼ぶ.

問2. 以下の函数の孤立特異点を全て求め,種類を判定
(1) $\sin(z^2)/z^4$ (2) $\sin(z^3)/z^2$ (3) $(z^4-1)/(z^3-1)$

§7.2. Laurent展開

Thm. 7.2.1. $0 \leqq r < R \leqq +\infty$, $c \in \mathbb{C}$, $A := \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z-c| < R\}$ 円環領域

$f : A \to \mathbb{C}$, 正則.

$$\Rightarrow \quad f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-c)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$$

右辺はA上絶対収束かつ広義一様収束. Laurent展開.

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(w)(w-c)^{-n-1}\,dw.$$

$C : |w-c| = d$, $r < {}^{\forall}d < R$, 正の向き. $\square$

Prp. 7.2.2. ($r=0$の場合) $c \in \mathbb{C}$が函数fのn位の極の時.

$c \in {}^{\exists}U \subset \mathbb{C}$: 開, ${}^{\exists}G : U \to \mathbb{C}$: 正則.

${}^{\forall}z \in U \quad f(z) = \dfrac{a_{-n}}{(z-c)^n} + \cdots + \dfrac{a_{-1}}{z-c} + G(z)$,

$$a_{-k} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=d} f(w)(w-c)^{k-1}\,dw \quad \square$$

Dfn. 7.2.3. Prp.7.2.3.の下で, $\dfrac{a_{-n}}{(z-c)^n} + \cdots + \dfrac{a_{-1}}{z-c}$: fの極cでの主部.

$a_{-1} =: \operatorname*{Res}_{z=c} f(z)$: ―〃― 留数

Cor. 7.2.4. $c \in \mathbb{C}$が函数fの位数nの極をもつとき,

$$\operatorname*{Res}_{z=c} f(z) = \lim_{z \to c} \frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left((z-c)^n f(z)\right)$$

(∵) Prp.7.2.2.から $(z-c)^n f(z) = a_{-n} + \cdots + a_{-1}(z-c)^{n-1} + G(z)\cdot(z-c)^n$

$n-1$回微分して $z \to c$ $\square$

問3 Laurent展開せよ.

(3) $\dfrac{2z}{z^2+1}$, $z=i$中心. (1) $\dfrac{\sin z}{z^2}$, $z=0$中心. (2) $ze^{1/z}$, $z=0$中心.

§7.3. 有理型函数

Dfn. 7.3.1. 函数 f が開集合 $U \subset \mathbb{C}$ 上有理型

$;\Longleftrightarrow \exists \{z_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset U$, s.t.

- U 内に集積点を持たない.
- f は $U \setminus \{z_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 上正則
- 各 z_n は f の極. □

$z \in \mathbb{C}$ が $S = \{z_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ の集積点 $;\Longleftrightarrow \exists \{w_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset S$, $w_n \neq z$, $\lim_{n \to \infty} w_n = z$

e.g. 有理函数 $f(z) = p(z)/q(z)$ は有理型函数.
$\{z_0, \ldots, z_{d-1}\}$: q の極. $z_n := z_{n \bmod d}$ $(n \in \mathbb{N})$

e.g. §11 の Γ 函数は, 極が $z = 0, -1, -2, \cdots$ の $\mathbb{C}$ 上の有理型函数.
(また $n \in \mathbb{N}$ に対して $\Gamma(n+1) = n!$ ⇝ $\Gamma(z)$ は有理函数ではない.)

Dfn. (1) 函数 $f(z)$ が $z = \infty$ で正則 $;\Longleftrightarrow F(z) = f(1/z)$ が $z = 0$ で正則.
〃 を極とする $:\Longleftrightarrow$ 〃 $z = 0$ を極とする.

(2) 〃 $\overline{\mathbb{C}}$ 上有理型 $;\Longleftrightarrow \mathbb{C}$ 上有理型かつ $z = \infty$ で正則又は極. □

$\overline{\mathbb{C}}$ 拡張された複素数平面.

Thm. 7.3.2. $\overline{\mathbb{C}}$ 上の有理型函数は有理函数