現代数学基礎 CⅢ　11 月 02 日分課題解答

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

問題. r を $r \neq 1$ かつ $r \neq \sqrt{3}$ なる正の実数とし, C を原点中心で半径 r の円に正の向きを入れた積分路とする. 次の複素積分を計算せよ.

$$\int_C \frac{1}{(z-1)(z^2+2z+3)} dz.$$

解答. 被積分関数 $f(z)$ が定義されていないのは $z = 1, z_+, z_-$ の三か所. 但し $z_\pm \coloneqq -1 \pm \sqrt{2}i$. $|z_\pm| = \sqrt{3}$ に注意する. C の内部を D, D の閉包を $\overline{D} \coloneqq D \cup C$, 積分を I とする.

(1) $0 < r < 1$ の場合, $\overline{D}$ 上 f は正則だから, Cauchy の積分定理より $I = 0$.

(2) $1 < r < \sqrt{3}$ の場合, $f(z) = \frac{g(z)}{z-1}$, $g(z) \coloneqq \frac{1}{z^2+2z+3}$ とすると $g(z)$ は $\overline{D}$ 上正則. よって Cauchy の積分表示から

$$I = \int_C \frac{g(z)}{z-1} dz = 2\pi i\, g(1) = \frac{\pi i}{3}.$$

(3) $\sqrt{3} < r$ の場合, $z = 1, z_\pm$ を中心とする D 内部にある円に正の向きを入れた積分路をそれぞれ $C_1, C_\pm$ とする (下図参照). Cauchy の積分定理より

$$I = I_1 + I_+ + I_-, \quad I_* \coloneqq \int_{C_*} f(z)\, dz \quad (* = 1, +, -).$$

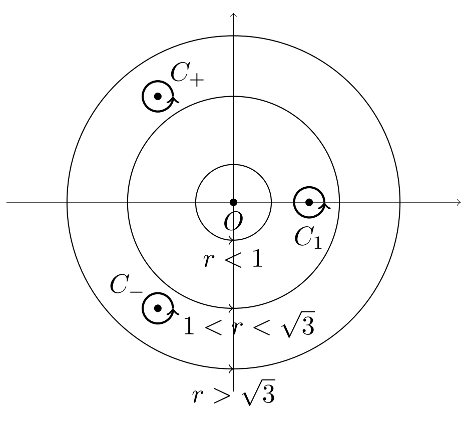
(ii) より $I_1 = \pi i/3$. I_+ については, $f(z) = \frac{h_+(z)}{z-z_+}$, $h_+(z) \coloneqq \frac{1}{(z-1)(z-z_-)}$ とすれば, $h_+(z)$ は C_+ 上とその内部で正則. Cauchy の積分表示より

$$I_+ = \int_{C_+} \frac{h_+(z)}{z-z_+} dz = 2\pi i h_+(z_+) = \frac{2\pi i}{(-2+\sqrt{2}i)\cdot 2\sqrt{2}i} = \frac{\pi}{6}(-\sqrt{2}-i).$$

同様に $h_-(z) \coloneqq \frac{z^3}{(z-1)(z-z_+)}$ とすれば,

$$I_- = \int_{C_-} \frac{h_-(z)}{z-z_-} dz = 2\pi i h_-(z_-) = \frac{\pi}{6}(\sqrt{2}-i).$$

よって $I = I_1 + I_+ + I_- = 0$.



以上より結論は

$$I = \begin{cases} 0 & (0 < r < 1, \sqrt{3} < r) \\ \dfrac{\pi i}{3} & (1 < r < \sqrt{3}) \end{cases}.$$

コメント． 3 点満点で採点しました．平均点は 2.6 点でした．場合分け 3 つをそれぞれ 1 点で採点しました．考えている積分路の内側にある留数に注目すると, 場合分けが必要なことに気づくはずです．

$r > \sqrt{3}$ の時に $I = 0$ となったことは, 次のように一般化できます:

$f(z)$ を 2 次以上の多項式であって根が互いに異なるものとする．また, f の全ての根が内側にあるような閉積分路を C とする．このとき

$$\int_C \frac{1}{f(z)} dz = 0.$$

証明: $f(z) = a(z - z_1) \cdots (z - z_n)$, $a \neq 0$, $n \geq 2$ とする．$a = 1$ の場合に示せば十分．部分分数分解

$$\frac{1}{(z - z_1) \cdots (z - z_n)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{r_k}{z - z_k}, \quad r_k := \prod_{1 \leq i \leq n,\, i \neq k} \frac{1}{z_k - z_i}$$

より積分は $2\pi i \sum_{k=1}^{n} r_k$ と等しいが, $\sum_{k=1}^{n} r_k = 0$ なので積分も 0.