現代数学基礎 CIII　 11 月 02 日分演習問題

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
連絡先: yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2023WC3.html

問題 6.1 (講義ノート問題 6.1.2 (2)). $F(z) \coloneqq \dfrac{\sin w}{w} dw$ が $z = 0$ の近傍で正則であることを示し, $z = 0$ を中心として Taylor 展開せよ.

問題 6.2 (講義ノート問題 6.2.3). f を整関数とし, $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対して $M(r) \coloneqq \max\{|f(z)| \mid |z| = r\}$ と定める. 正の実数 B, α が存在して, 任意の r に対して $M(r) \leq Br^{\alpha}$ となるなら, f は高々 $\lfloor \alpha \rfloor$ 次の多項式であることを示せ. 但し $\lfloor \alpha \rfloor \coloneqq \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq \alpha\}$.

解答 6.1. $f(w) \coloneqq w^{-1}\sin w = \sum_{n\geq 0}(-w^2)^n/(2n+1)!$ の収束半径は, $f_n \coloneqq (-1)^n/(2n+1)!$ として $\lim_{n\to\infty}|f_{n+1}/f_n| = \lim_{n\to\infty}(2n+2) = \infty$. よって $f(w)$ は整関数であり, 任意の有界領域内で絶対収束する. 従って項別積分できて,

$$F(z) = \int_0^z f(w)\,dw = \sum_{n\geq 0}\int_0^z \frac{(-w^2)^n}{(2n+1)!}dw = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!\cdot(2n+1)}z^{2n+1}.$$

これが $z=0$ を中心とする $F(z)$ の Taylor 展開である.

解答 6.2. $n > \lfloor\alpha\rfloor$ なる整数 n について, 導関数の積分表示 $f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{|z|=r} f(z)z^{-n-1}dz$ から

$$\left|f^{(n)}(0)\right| \leq \frac{n!}{2\pi}\left|\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz\right| \leq \frac{n!}{2\pi}\cdot 2\pi r\cdot\sup\left\{\left|\frac{f(z)}{z^{n+1}}\right|; |z|=r\right\} = \frac{n!M(r)}{r^n} \leq n!Br^{\alpha-n}.$$

右辺は $r\to\infty$ で 0 に収束するから, $n > \lfloor\alpha\rfloor$ ならば $f^{(n)}(0)=0$. よって Taylor 展開から $f(z)$ は高々 $\lfloor\alpha\rfloor$ 次だと分かる.