§6 正則函数の性質　11・2・1

§6.1.

Prp. 6.1.1. (Cauchyの不等式) $D = D(z, R)$：開円板. $z \in \mathbb{C}, R > 0$.
f: $\overline{D}$ を含む開集合上の正則函数.
$\|f\|_{\partial D} := \sup\{|f(w)| : w \in \partial D\}$
$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad |f^{(n)}(z)| \leqq n! \cdot \|f\|_{\partial D}/R^n$
特に $\quad |f(z)| \leqq \|f\|_{\partial D}$

∵ 導函数の積分表示から,
$$|f^{(n)}(z)| = \left|\frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial D^+} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}dw\right|$$
$$\leqq \frac{n!}{2\pi} \cdot l(\partial D^+) \cdot \sup\{|f(w)\cdot(w-z)^{-n-1}| : w \in \partial D\}$$
$$= \frac{n!}{2\pi} \cdot 2\pi R \cdot R^{-n-1}\|f\|_{\partial D} = n! \cdot \|f\|_{\partial D}/R^n$$
□

Thm. 6.1.2. (正則函数のTaylor展開) Dとfは6.1.1.と同じ.
$\Rightarrow \forall w \in D \quad f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (w-z)^n,$
$$a_n := \frac{1}{n!} f^{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D^+} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}dw$$

∵ $f(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D^+} \frac{f(u)}{u-w}du$, $\quad \left|\frac{w-z}{u-z}\right| < 1$ より
$$(u-w)^{-1} = ((u-z)-(w-z))^{-1} = \frac{1}{u-z}\left(1 - \frac{w-z}{u-z}\right)^{-1}$$
$$= \frac{1}{u-z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{w-z}{u-z}\right)^n \quad : u \underset{\partial D}{\in} に関して絶対収束. 一様$$
$$\Rightarrow f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D^+} \frac{1}{u-z}\left(\frac{w-z}{u-z}\right)^n f(u)du$$
↑ 一様収束するなら積分と無限和は交換可. (命題3.2.2)
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (w-z)^n \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D^+} f(u)\cdot(u-z)^{-n-1}du$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (w-z)^n \cdot \frac{1}{n!} f^{(n)}(z).$$
□

Thm. 6.1.3. 開集合上の正則函数fは任意回微分可能.
$\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$ は正則.

∵ Thm. 6.1.2. と巾級数が任意微分可能 (Cor. 2.2.12) より □

§6.2. 整函数に関するLiouvilleの定理

Thm. 6.2.1. 有界な整函数は定数函数. $\square$

有界：$\{|f(z)| : z\in\mathbb{C}\}\subset\mathbb{R}$ が有界. 整函数：$\mathbb{C}$上正則

(証) $\forall z\in\mathbb{C}$で $f'(z)=0$ がいえれば, Cor.3.3.4より fは定数.

有界性が $\exists B\in\mathbb{R}_{>0}.\ \forall z\in\mathbb{C},\ |f(z)|<B.$ 　領域上正則なfが, $f'\equiv 0$ なら…

Cauchyの不等式より $\forall z\in\mathbb{C},\ \forall R>0,\ |f'(z)|\le B/R.\ \therefore f'(z)=0$ $\square$

Thm. 6.2.2. (代数学の基本定理)

定数でない$\mathbb{C}$係数多項式 $P(z)=a_nz^n+\cdots+a_0$は重複度をこめてn個の根を$\mathbb{C}$に持つ.

(証) 根がなければ $1/P(z)$は有界.

実際, $z\neq 0$なら $P(z)/z^n=a_n+(a_{n-1}/z+\cdots+a_0/z^n)$.

$|z|\to\infty$で $(\ \ )\to 0$ だから, $c:=|a_n|/2$ として,

$\exists R>0,\ \forall z\in\mathbb{C},\ |z|>R\Rightarrow |(\ \ )|<c.$

$\therefore$ 〃 〃 $\Rightarrow |P(z)/z^n|\ge |a_n|-|(\ \ )|>c$

$\therefore$ 〃 〃 $\Rightarrow |1/P(z)|<1/c|z|^n<1/cR^n$

つまり $|z|>R$で $1/P(z)$は有界. 　コンパクト集合の連続写像による像はコンパクト

一方で $|1/P(z)|$は有界閉集合 $|z|\le R$上の連続函数だから, 像も有界閉集合.

根がなければ$\mathbb{C}$上正則. Liouvilleの定理6.2.1.より $1/P(z)$は定数.

よって定数でないPは根を1つ持つ. これを $z=z_1$とすると,

剰余の定理より $P(z)=(z-z_1)\times(n-1$次多項式$)$.

次数nに関する帰納法で主張が従う. $\square$

§6.3. 一致の定理と解析接続

Dfn. $z \in \mathbb{C}$ が $S \subset \mathbb{C}$ の集積点 $:\Leftrightarrow \exists \{z_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset S \setminus \{z\}$
s.t. $\lim_{n\to\infty} z_n = z$.

Thm. 6.3.1. $\Omega \subset \mathbb{C}$: 領域. $f: \Omega \to \mathbb{C}$: 正則.
$\{z_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \Omega$, 相異なる点列, Ω に集積点を持つ, $f(z_n) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow f = 0 \quad (\forall z \in \Omega,\ f(z) = 0)$ □

↓ 一致の定理

Cor. 6.3.2. $\Omega \subset \mathbb{C}$: 領域. $f, g: \Omega \to \mathbb{C}$: 正則.
$\phi \neq \exists U \subset \Omega$, 開. $f|_U = g|_U \Rightarrow f = g$

$f|_U : U \to \mathbb{C}$. 定義域を U に制限.

(∵) $\exists D = D(c, r) \subset U$, $c \in \mathbb{C}$, $r > 0$.
$\{z_n := c + r/(n+2) \mid n \in \mathbb{N}\} \subset D \subset U \subset \Omega$, 相異なる点列,
$\forall n\ (f-g)(z_n) = 0 \quad \therefore f - g = 0$ □

Dfn. 6.3.3. $U, V \subset \mathbb{C}$: 領域, $U \cap V \neq \phi$.
$f: U \to \mathbb{C}$, $g: V \to \mathbb{C}$: 共に正則.
$f|_{U\cap V} = g|_{U \cap V}$ のとき. g を f の V への解析接続と呼ぶ. □

Cor. f の V への解析接続は, 存在するなら一意.
(∵) $g, h: V \to \mathbb{C}$: f の解析接続. $g|_{U\cap V} = h|_{U\cap V}$
Cor. 6.3.2 を $(f, g, \Omega, U) = (g, h, V, U \cap V)$ に適用. □

E.g. $f: U = D(0,1) \to \mathbb{C}$, $f(z) = 1 + z + z^2 + \cdots$.
$g: V = \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$, $g(z) = \frac{1}{1-z}$ は f の V への解析接続

§6.4. Moreraの定理

Thm. 6.4.1. $D\subset\mathbb{C}$：開円板，$f:D\to\mathbb{C}$，連続
$\forall T\subset D$：三角形 $\int_T f(z)\,dz=0 \Rightarrow f$は正則．
↑向き付けあり

(∵) 定理4.2.1.（円板上の正則関数は原始関数を持つ）
の証明はGoursatの定理4.1.2.と関数fの連続性しか用いない．
⇝ $F(z):=\int^z f(z)\,dz$ は fの原始関数．
特にFは正則で，Thm.6.1.3.よりFは2回微分可能．∴ fは正則．□

問1 $\int_0^z \frac{\sin\zeta}{\zeta}\,d\zeta$ が $z=0$の近傍で正則であることを示し，
$z=0$を中心にTaylor展開せよ．

問2. f：整関数　$r>0$に対し $M(r):=\max\{|f(z)| ; |z|=r\}$
もし $\exists B,\alpha>0,\ \forall r>0\ \ M(r)\leqq Br^{\alpha}$ なら，
fは高々$\lfloor\alpha\rfloor$次の多項式である．