現代数学基礎 CIII　10 月 26 日分演習問題

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
連絡先: yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2023WC3.html

問題 5.1 (講義ノート問題 5.1.4)**.** $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ は領域だが単連結ではないことを示せ.

問題 5.2. $\alpha \in \mathbb{C}$ とし, C を正の向きの円であって α を通らないものとする. 次の複素積分を計算せよ.

$$\int_C \frac{1}{z-\alpha}\,dz.$$

問題 5.3 (講義ノート問題 5.2.1)**.** C を単純閉曲線であって, 内部が進行方向左側にあり, また $\pm i$ がその内部にあるものとする. 次の複素積分を計算せよ.

$$\int_C \frac{1}{z^2+1}\,dz.$$

問題 5.4 (講義ノート問題 5.2.3)**.** 次の実積分を複素積分を用いて計算せよ. 但し $c \in \mathbb{C}$, $|c| < 1$ とする.

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-2c\cos\theta+c^2}\,d\theta.$$

解答 5.1. 開集合であること: 任意の $z \in \Omega$ について, $D(z, |z|) \subset \Omega$ だから $\Omega^\circ = \Omega$.

領域であること: 弧状連結性を示す. Ω の任意の二点 z, w は $z = re^{i\theta}$, $w = se^{i\phi}$, $r, s > 0$, $\theta, \phi \in [0, 2\pi)$ と書ける. 原点中心で半径 r の円弧のうち, 反時計回りに偏角 θ から ϕ $(+2\pi)$ までの部分を γ_1 とし, また偏角 ϕ で原点を通る半直線のうち, $re^{i\phi}$ を始点とし $se^{i\phi}$ を終点とする部分を γ_2 として, γ_1 と γ_2 をつなげてできる区分的に滑らかな曲線 γ を考えると, それは z を始点とし w を終点とする. よって Ω は弧状連結.

単連結でないこと: $f(z) := 1/z$ は Ω 上の正則関数. 正の向きの単位円 (原点中心で半径 1 の円) C について $\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \neq 0$ [次の解答 5.2 を参照]. よって講義ノート系 5.2.2 から Ω は単連結ではない.

解答 5.2. $f(z) := \frac{1}{z-\alpha}$ と置くと, 答えは

$$\int_C f(z)\,dz = \begin{cases} 0 & (\alpha \text{ が } C \text{ の外部にある}) \\ 2\pi i & (\alpha \text{ が } C \text{ の内部にある}) \end{cases}.$$

C の半径を $r > 0$, 中心を $c \in \mathbb{C}$ とすれば $C = \partial D(c, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| = r\}$.

- α が C の外部にあれば, $s := |z - c| - r > 0$ だから, 単連結領域である開円板 $D(c, r + \frac{s}{2})$ とその上の正則関数 $f(z) = \frac{1}{z-\alpha}$ および閉曲線 C に講義ノート系 5.2.2 を適用して, $\int_C f(z)\,dz = 0$.
- α が C の内部にある場合. 中心 α, 半径 1 の正の向きの円 Γ と C は $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{\alpha\}$ においてホモトピックだから, 講義ノート定理 5.1.2 を Ω と $f(z)$ に適用して $\int_C f(z)\,dz = \int_\Gamma f(z)\,dz$. 平行移動 $z \mapsto z - \alpha$ を利用して $\int_\Gamma f(z)\,dz$ を計算すると, 原点中心で半径 1 の正の向きの円を Γ' として,

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_{\Gamma'} \frac{1}{z}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\theta}}{e^{i\theta}}\,d\theta = 2\pi i.$$

解答 5.3. $(z^2+1)^{-1} = \bigl((z-i)^{-1} - (z+i)^{-1}\bigr)/(2i)$ と部分分数分解する. $\pm i$ を中心とする半径 $1/2$ の円に正の向き付けを入れたものを $C_\pm$ とすれば, 解答 5.2 の結果から

$$\begin{aligned} \int_C \frac{dz}{z^2+1} &= \int_C \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right)dz = \frac{1}{2i}\int_C \frac{dz}{z-i} - \frac{1}{2i}\int_C \frac{dz}{z+i} \\ &= \frac{1}{2i}\int_{C_+} \frac{dz}{z-i} - \frac{1}{2i}\int_{C_-} \frac{dz}{z+i} = \frac{2\pi i(1-1)}{2i} = 0. \end{aligned}$$

解答 5.4. 求める積分を I と表す. 積分路のパラメータ表示を $z = e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$ と取ると, $d\theta = dz/iz$, $\cos\theta = (z + z^{-1})/2$ なので

$$I = \int_{|z|=1} \frac{1}{1 - c(z + z^{-1}) + c^2}\frac{dz}{iz} = \int_{|z|=1} \frac{i\,dz}{c(z-c)(z-c^{-1})}.$$

単位円上とその内部において, 被積分関数は $z = c$ を除いて正則で, $z = c$ の周りでは $w := z - c$ として

$$\frac{1}{c(z-c)(z-c^{-1})} = \frac{1}{cw(w + c - c^{-1})} = \frac{1}{c(c-c^{-1})w}\bigl(1 + (w \text{ の正則関数})\bigr)$$

と展開できるので, $I = 2\pi i \times i/(c^2 - 1) = 2\pi/(1 - c^2)$.