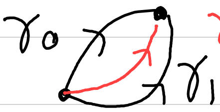
§5 Cauchyの積分定理2　　10・26・1

§5.1. ホモトピーと単連結領域

Dfn. 5.1.1. $U \subset \mathbb{C}$: 開, γ_0, γ_1 : U上の曲線, 始点と終点を共有.

γ_0とγ_1がホモトピック



γ_s : $h_s : [a,b] \to U$ が定める曲線

$:\Longleftrightarrow \exists h : [0,1]\times[a,b] \to U$, 連続

s.t. (i) $\forall s \in [0,1]$ $h_s : [a,b] \to U$, $h_s(t) := h(s,t)$

はU内の区分的に滑らかな曲線を定める.

h:ホモトピー写像

(ii) h_0はγ_0の, h_1はγ_1のパラメータ付け

(iii) $\forall s \in [0,1]$, $h_s(a) = h_0(a)$ ($=h_1(a)$, 始点)

$h_s(b) = h_0(b)$ ($=h_0(b)$, 終点) □

Thm. 5.1.2. $U \subset \mathbb{C}$: 開, $f : U \to \mathbb{C}$: 正則.

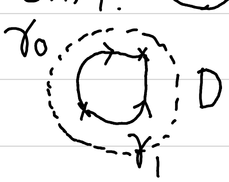
γ_0, γ_1 : ホモトピックな、U上の区分的に滑らかな曲線.

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz$$

(証明には, $\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$の部分集合について 有界閉 $\Longleftrightarrow$ コンパクト $\Longleftrightarrow$ 点列コンパクト を用いる.)

Dfn. 5.1.3. 領域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ が単連結 $:\Longleftrightarrow$ 始点と終点を共有するΩ上の2曲線は必ずホモトピック. □

Lem. 5.1.4. 開円板Dは単連結領域.



∵ $z_0(t), z_1(t) : [a,b] \to \mathbb{C}$: D内の2曲線のパラメータ付け.

$h(s,t) := (1-s)z_0(t) + s\cdot z_1(t)$

が求めるホモトピー写像. □

§5.2. 単連結領域とCauchyの積分定理

Thm. 5.2.1. 単連結領域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上の正則函数 f は原始函数を持つ.

(c.f. Thm.4.2.1. 開円板 D 上の…)

$a \in \Omega$ を固定. $F : \Omega \to \mathbb{C}$ を

$F(z) := \int_\gamma f(z)dz$, γ: 始点 a, 終点 z の, Ω 上の区分的に滑らかな曲線

で定ぎ. Ω は弧状連結だから γ は存在し、
単連結だから γ のとり方によらない. (Thm.5.1.2)

$z+h \in \Omega$ なら $F(z+h) - F(z) = \int_\eta f(z)dz$ η: 始点 z, 終点 $z+h$ の曲線

あとは Thm.4.2.1. と同様に $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(F(z+h) - F(z)) = f(z)$ □

Cor. 5.2.2. $\Omega \subset \mathbb{C}$: 単連結領域. $f : \Omega \to \mathbb{C}$: 正則. γ: Ω 上の区分的に滑らかな閉曲線

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

Thm.5.2.1. と Cor.3.2.5 (原始函数があれば $\int_\gamma f(z) = 0$) □

問1 (問5.1.4) $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ は領域だが単連結ではない.

Thm. 5.2.3. $C_0, \ldots, C_n$: 互いに交わらない, 区分的に滑らかな単純閉曲線.

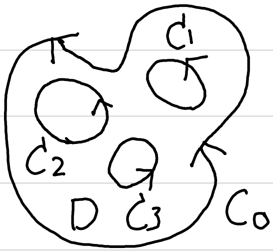
s.t. (i) C_0 の内部に $C_1, \ldots, C_n$ が含まれる.

(ii) $C_1, \ldots, C_n$ は互いの外部に 〃.

(iii) D: $C_0, \ldots, C_n$ が囲む有界領域

C_0 の向き付けは D が進行方向左側

$C_1, \ldots, C_n$ 〃 〃 右側



f: $\bar{D}$ を含む開集合上の正則函数

$$\int_{C_0} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k} f(z)dz$$

問2. $\alpha \in \mathbb{C}$, C: 正向きの円で α を通るもの. $\int_C \frac{1}{z-\alpha} dz = ?$

問3. C: 単純閉曲線であって $\pm i$ が内部にある. $\int_C \frac{1}{z^2+1} dz = ?$
向きは内部が進行方向左側.

問4. $c \in \mathbb{C}$, $|c| < 1$. $\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-2c\cdot\cos\theta + c^2} d\theta = ?$