現代数学基礎 CⅢ　10 月 19 日分課題解答

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

問題. α, β, γ は複素数で, $\gamma \neq 0, -1, -2, \ldots$ だとする. 第 n 項が

$$a_n \coloneqq \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{n!} \frac{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}$$

で与えられる冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ の収束半径を求めよ.

解答. (i) α または β が 0 以下の整数なら, 級数は多項式なので収束半径無限大.

(ii) そうでないなら, ratio test (講義ノート命題 2.2.5) を試すと

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{\alpha+n}{1+n} \frac{\beta+n}{\gamma+n} \right| = \left| \frac{1+\alpha/n}{1+1/n} \frac{1+\beta/n}{1+\gamma/n} \right| \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

となるので, 収束半径は 1.

コメント. 3 点満点で採点しました. 平均点は 2.2 点でした.

(i) の場合は超幾何多項式と呼ばれて, 数学の色々なところに顔を出す古典的な特殊函数です.