現代数学基礎 CIII　10 月 19 日分演習問題

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
連絡先: yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2023WC3.html

問題 4.1 (講義ノート問題 4.3.1)**.** 任意の部分集合 $S \subset \mathbb{C}$ に対して, $S^\circ \subset \overline{S}$ を示せ.

問題 4.2 (講義ノート問題 4.3.2)**.** 開円板 $D(c,r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| < r\}$ について, その閉包は閉円板 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| \le r\}$ であることを示せ.

問題 4.3 (講義ノート問題 4.2.2)**.** Cauchy の積分定理を使って, 実積分

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

を導こう. 下図の積分路上で $(1-e^{iz})/z^2$ の積分を考える. 内側の半円周部を C_r^-, 外側の半円周部を C_R^+ と書くと, Cauchy の積分定理から

$$\int_{-R}^{-r} \frac{1-e^{ix}}{x^2}\, dx + \int_{C_r^-} \frac{1-e^{iz}}{z^2}\, dz + \int_r^R \frac{1-e^{ix}}{x^2}\, dx + \int_{C_R^+} \frac{1-e^{iz}}{z^2}\, dz = 0. \qquad (*)$$

(1) C_R^+ 上の積分が $R \to \infty$ で 0 に収束することを示せ.
(2) C_r^- 上の積分が $r \to 0$ で $-\pi$ となることを示せ.
(3) 以上を使って結論を導け.

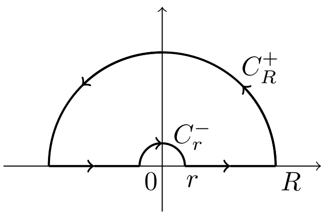

図 1　積分路

問題 4.4 (講義ノート問題 4.3.5 (1))**.** C を原点中心で半径 1 の正向きの円とする. 次の複素積分の値を求めよ.

$$\int_C \frac{e^z}{z} dz.$$

解答 4.1. 任意の $z \in S$ と任意の $r > 0$ に対して $z \in D(z,r) \cap S$ なので $z \in \overline{S}$, つまり $S \subset \overline{S}$. 一般に $S^\circ \subset S$ なので, 合わせて $S^\circ \subset S$.

解答 4.2. $D \coloneqq D(c,r)$ とし, その閉包を $\overline{D}$ と書く. $z \in \mathbb{C}$ について, $|z-c| > r$ なら, $\varepsilon \coloneqq (|z-c|-r)/2$ とすれば $D(z,\varepsilon) \cap D = \emptyset$ なので, $z \notin \overline{D}$. また $|z-c| = r$ なら, 任意の $0 < R < r$ に対して $c+(z-c)(r-R)/r \in D$ より $D(z,R) \cap D \neq \emptyset$ なので $z \in \overline{D}$. そして $|z-c| < r$ なら $z \in D \subset \overline{D}$. 以上より D の閉包は閉円板.

解答 4.3. 被積分関数を $f(z) \coloneqq (1-e^{iz})/z^2$ と書く.

(1) $z \in C_R^+$ の偏角を θ とすると, $e^{iz} = e^{iR(\cos\theta + i\sin\theta)} = e^{-\sin\theta} e^{iR\cos\theta}$ より $\left|e^{iz}\right| = e^{-\sin\theta} \leq 1$. よって $\left|(1-e^{iz})/z^2\right| \leq 2/|z|^2$ であり,

$$\left|\int_{C_R^+} f(z)\,dz\right| \leq \ell(C_R^+) \sup\{\left|(1-e^{iz})/z^2\right| \mid z \in C_R^+\} \leq \pi R \sup\{2/|z|^2 \mid z \in C_R^+\} = \pi R \cdot \frac{2}{R^2} = \frac{2\pi}{R}$$

と評価できるので, $R \to \infty$ で 0 に収束する.

(2) $z = 0$ で $1 - e^{iz}$ は正則で微分の値は $-i$ だから, $z \to 0$ で有界な関数 $E(z)$ を用いて $1 - e^{iz} = -iz + zE(z)$, つまり $f(z) = -i/z + E(z)$ と書ける. C_r^- を $z = re^{i(\pi-\theta)}$, $0 \leq \theta \leq \pi$ とパラメータ付けすると

$$\int_{C_r^-} \frac{1-e^{iz}}{z^2}\,dz = \int_0^\pi \left(\frac{-i}{re^{i(\pi-\theta)}} + E(re^{i(\pi-\theta)})\right)(-ir)e^{i(\pi-\theta)}\,d\theta = -\int_0^\pi d\theta + ir\int_\pi^0 E(re^{i\theta})e^{i\theta}\,d\theta.$$

$|E(z)| < B$ とすれば $\left|\int_\pi^0 E(re^{i\theta})e^{i\theta}d\theta\right| \leq B\int_0^\pi d\theta = \pi B$ なので, $r \to 0$ で

$$\int_{C_r^-} \frac{1-e^{iz}}{z^2}\,dz \longrightarrow -\int_0^\pi d\theta = -\pi.$$

(3) 以上より $(*)$ の極限は

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1-e^{ix}}{x^2}\,dx - \pi + \int_0^\infty \frac{1-e^{ix}}{x^2}\,dx + 0 = 0.$$

あとは $\cos x = (e^{ix} + e^{-ix})/2$ より結論を得る.

解答 4.4. $e^z/z = (e^z-1)/z + 1/z$ と分解する. $f(z) \coloneqq (e^z-1)/z$ は $f(0) = 1$ と定義すれば $\mathbb{C}$ 上正則なので, Cauchy の積分定理より $\int_C f(z)dz = 0$. よって

$$\int_C \frac{e^z}{z}dz = \int_C \frac{1}{z}dz = 2\pi i.$$