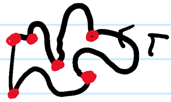
4. Cauchy の積分定理I

§4.1. Goursat の定理

グルサー

Fact (Jordan の閉曲線定理)　　自己交差がない



4.1.1.　Γ: ℂ上の, 区分的に滑らかな単純閉曲線

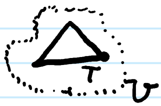
$\Rightarrow$ ℂ\Γ は 2つの領域からなる.　　連結開集合

{ 1つは有界かつ単連結　次回　: Γの内部

{ もう1つは非有界.　　: Γの外部 □

Thm. (Goursat の定理)　$U \subset \mathbb{C}$: 開集合.　T: U上の三角形で内部 $\subset U$

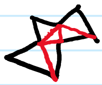
4.1.2.　$f: U \to \mathbb{C}$: 正則.　$\int_T f(z)dz = 0$ □　↑単純閉曲線で、三つの線分からなる



Cor.　$U \subset \mathbb{C}$: 開集合　P: U上の多角形で内部 $\subset U$

4.1.3.　$f: U \to \mathbb{C}$: 正則　$\int_P f(z)dz = 0$

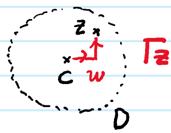
☺　P(の内部)を三角形に分割: $T_1, \dots, T_n$



$\int_P = \int_{T_1} + \dots + \int_{T_n} = 0$ □

§4.2. Cauchy の積分定理

Thm.　開円板 上の正則関数は原始関数を持つ.



4.2.1.　☺　$D = D(c, r)$.　$\forall z \in D$: 固定.

$w := c + \mathrm{Re}(z-c) \in D$

Γ_z: 線分 $\overline{cw}$ と $\overline{wz}$ からなる, D内の曲線

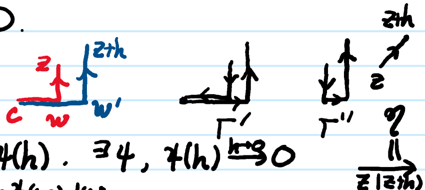
$F(z) := \int_{\Gamma_z} f(w)dw$

F が f の原始関数.:　$z, z+h \in D$.

$F(z+h) - F(z) = \int_{\Gamma_{z+h}} - \int_{\Gamma_z}$

$= \int_{\Gamma'}$

$= \int_\eta$.



f は z で連続なので、$f(z+h) = f(z) + \psi(h)$.　$\exists \psi$, $\psi(h) \xrightarrow{h \to 0} 0$

$\int_\eta f(w)dw = f(z)h + \int_\eta \psi(w)dw$

$\left|\int_\eta \psi(w)dw\right| \leq \ell(\eta) \cdot \sup\{|\psi(w)| : w \in \eta\} = |h| \cdot M$,　$M \xrightarrow{h \to 0} 0$

$\therefore \lim_{h \to 0} (F(z+h) - F(z))/h = \lim_{h \to 0} (f(z) + M \cdot |h|/h) = f(z)$ □

Thm. (円板の場合の Cauchy の積分定理)

4.2.2.　D: 開円板.　$f: D \to \mathbb{C}$: 正則.　C: D上の区分的に滑らかな閉曲線

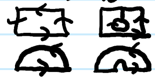
$\int_C f(z)dz = 0$　☺ Thm.4.2.1. と Cor.3.2.5 □

2023年10月18日　　16:32

Thm. 4.2.3. (Cauchyの積分定理) $D \subset \mathbb{C}$: 領域. $f : D \to \mathbb{C}$: 正則
C : D上の区分的に滑らかな単純閉曲線, 内部$\subset D$

$$\int_C f(z) = 0 \qquad \square$$

実用上, Cは



§4.3. Cauchyの積分表示.

Dfn. $S \subset \mathbb{C}$: 部分集合. $\overline{S} := \{ z \in \mathbb{C} \mid \forall r \in \mathbb{R}_{>0},\ D(z,r) \cap S \neq \phi \}$: Sの閉包,
$S^\circ \subset S$: 内部 $\quad \partial S := \overline{S} \setminus S^\circ$: Sの境界 $\quad \square$

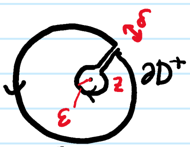
Ex.1. $S^\circ \subset \overline{S}$.
Ex.2. $D = D(z,r)$の閉包は閉円板 $\overline{D(z,r)}$. 境界は $\partial D = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-c| = r \}$

Thm. 4.3.1. (Cauchyの積分表示, 円の場合)
$D \subset \mathbb{C}$: 開円板, $U \subset \mathbb{C}$: 開, $\overline{D} \subset U$ $\quad f : U \to \mathbb{C}$: 正則.
$\forall z \in D$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D^+} \frac{f(w)}{w-z}\, dw$$

∂D^+ : 境界∂Dに正の向きを入れたもの

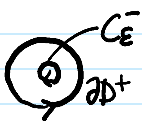
☺



$\Gamma_{\delta,\varepsilon}$

$F(w) := f(w)/(w-z)$
Cauchy積分定理から $\displaystyle\int_{\Gamma_{\delta,\varepsilon}} F(w)\, dw = 0$

$$\int_{\Gamma_{\delta,\varepsilon}} = \int_{外} + \int_{\swarrow} + \int_{内} + \int_{\nearrow} = 0$$
$$\downarrow \delta \to 0 \qquad\qquad \downarrow \delta \to 0$$
$$\int_{外円} + \int_{内円} = 0 \qquad (*)$$
$$\parallel \qquad\qquad \parallel$$
$$主張 \to \int_{\partial D^+} \qquad \int_{C_\varepsilon^-}$$



$$F(z) = \frac{f(w) - f(z)}{w - z} + \frac{f(z)}{w-z}.$$

fは正則なので
$\exists B > 0\ \forall w \in C_\varepsilon^-$. $\left| \dfrac{f(w)-f(z)}{w-z} \right| \leq B$

$$\therefore \left| \int_{C_\varepsilon^-} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\, dw \right| \leq B \cdot l(C_\varepsilon^-) = 2\pi\varepsilon \cdot B$$

C_ε^-のパラメータ付け $w(\theta) = z + \varepsilon e^{-i\theta}$. $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

$$\int_{C_\varepsilon^-} \frac{f(z)}{w-z}\, dw = f(z) \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1}{\varepsilon e^{-i\theta}} \cdot (-i\varepsilon) e^{-i\theta} d\theta = -2\pi i f(z)$$

$(*)$は $\quad 0 = \displaystyle\int_{\partial D^+} F + \int_{C_\varepsilon^-} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} + \int_{C_\varepsilon^-} \frac{f(z)}{w-z} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \int_{\partial D^+} + 0 - 2\pi i f(z)$ $\quad \square$

2023年10月18日　　18:07

Thm. 4.3.2. 同じ仮定のもと、$\forall z \in D$, $\forall n \in \mathbb{N}$、fはn回微分可能で

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial D^+} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,dw$$

(証明) nに関する帰納法. $n=0$はThm.4.3.1. $n-1$までo.k.とすると

$$f^{(n-1)}(z) = \frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_{\partial D^+} \frac{f(w)}{(w-z)^n}\,dw$$

$z+h \in D$とする. $A := w-z-h$

$$\frac{f^{(n-1)}(z+h)-f^{(n-1)}(z)}{h} = \frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_{\partial D^+} \frac{f(w)}{h}\left(\frac{1}{A^n}-\frac{1}{(A+h)^n}\right)dw$$

$$= \frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_{\partial D^+} \frac{f(w)}{h}\,\frac{nA^{n-1}h+\cdots+h^n}{A^n(A+h)^n}\,dw$$

$$\xrightarrow{h\to 0} \frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_{\partial D^+} f(w)\,\frac{nA^{n-1}}{A^{2n}}\,dw = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial D^+}\frac{f(w)\,dw}{(w-z)^{n+1}}$$

□