現代数学基礎 CIII　10 月 14 日分演習問題

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
連絡先: yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2023WC3.html

問題 3.1 (講義ノートの定義 3.1.2)**.** 2 つのパラメータ付き曲線の間の $\sim$ が同値関係であることを示せ.

問題 3.2 (講義ノートの例 3.1.3)**.** パラメータ付き曲線 $\widetilde{p}\colon [0,1] \to \mathbb{C}$, $\widetilde{p}(t) \coloneqq z + re^{2\pi it}$ の定める曲線が中心 z, 半径 r の正向きの円であることを示せ.

問題 3.3 (講義ノートの定義 3.1.6, 問題 3.1.2)**.** 曲線 C の逆向きの曲線 C^- が, C のパラメータ表示 p の取り方によらないことを示せ.

問題 3.4 (講義ノートの定義 3.1.9)**.** 滑らかな曲線 C の長さ $\ell(C)$ が, C のパラメータ表示 p の取り方によらないことを示せ.

問題 3.5 (講義ノートの §3.2 冒頭)**.** 曲線 C について, パラメータ表示 $p\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ の像 $p([a,n])$ は p によらないことを示せ.

問題 3.6 (講義ノートの §3.2 最初の定義)**.** 滑らかな曲線 C 上の連続関数 f の積分 $\int_C f(z)dz$ が p の取り方によらないことを示せ.

問題 3.7. 講義ノートの定理 3.2.4 を証明せよ.

問題 3.8 (講義ノートの問題 3.2.1 (1))**.** $n \in \mathbb{Z}$ とし, また C を原点中心で半径 r の正向きの円とする. 積分 $\int_C z^n\,dz$ を求めよ.

問題 3.9 (講義ノートの問題 3.2.1 (3))**.** r を正の実数, a, b を複素数で $|a| < r < |b|$ だと仮定し, また C を原点中心で半径 r の正向きの円とする. 積分 $\int_C \frac{1}{(z-a)(z-b)}\,dz$ を求めよ,

問題 3.10 (講義ノートの問題 3.2.1 (3))**.** パラメータ表示 $p(t) = e^{it}$ $(-\pi/2 \le t \le \pi/2)$ から定まる曲線 C について, 積分 $\int_C \operatorname{Log} z\,dz$ を求めよ.

解答 3.1. $p\colon [a,b]\to\mathbb{C}$, $q\colon [c,d]\to\mathbb{C}$, $r\colon [e,f]\to\mathbb{C}$ をパラメータ付き曲線と呼ぶ.

(1) $p\sim p$: 連続微分可能で微分が正である全単射 $\mathrm{id}\colon [a,b]\to[a,b]$ がパラメータ変換を与える.

(2) $p\sim q$ なら, $\varphi\colon [c,d]\to[a,b]$ を p から q へのパラメータ変換とすると, $\varphi^{-1}\colon [a,b]\to[c,d]$ は連続微分可能な全単射で微分は正だから, q から p へのパラメータ変換を与える. よって $q\sim p$ を与える.

(3) $p\sim q$ かつ $q\sim r$ なら, パラメータ変換を $\varphi\colon [c,d]\to[a,b]$, $\psi\colon [e,f]\to[c,d]$ として, $\varphi\circ\psi$ が $p\sim r$ を与える.

解答 3.2. $p\colon [0,2\pi]\to\mathbb{C}$, $p(t)=z+re^{it}$ から $\widetilde{p}$ へのパラメータ変換が $\varphi\colon [0,1]\to[0,2\pi]$, $\varphi(s)=2\pi$ で定まるので $p\sim\widetilde{p}$.

解答 3.3. パラメータ付き曲線 $p\colon [a,b]\to\mathbb{C}$ から $q\colon [c,d]\to\mathbb{C}$ が同値であるとき, $p-$ と q^- が同値であることを示せば良い. p から q へのパラメータの取り替え $\varphi\colon [c,d]\to[a,b]$ が存在するが, $\psi(s)\coloneqq a+b-\varphi(c+d-s)$ で連続微分可能全単射 $\psi\colon [c,d]\to[a,b]$ が定めると, $q=p\circ\varphi$ より $p^-(\psi(s))=p(a+b-\psi(s))=p(\varphi(c+d-s))=q(c+d-s)=q^-(s)$ となるので, ψ はパラメータ付き曲線 $p^-(t)=p(a+b-t)$ から $q^-(s)=q(c+d-s)$ へのパラメータの取り替えである.

解答 3.4 (定義 3.1.9 の直後参照)**.** $q\colon [c,d]\to\mathbb{C}$ を別のパラメータ付けとして, $\varphi\colon [c,d]\to[a,b]$ を p から q へのパラメータの取り替えとすると, $q(s)=(p\circ\varphi)(s)$ および $\varphi'(s)>0$ より

$$\int_c^d |q'(s)|\,ds=\int_c^d |p'(\varphi(s))\varphi'(s)|\,ds=\int_c^d |p'(\varphi(s))|\,\varphi'(s)\,ds=\int_a^b |p'(t)|\,dt.$$

解答 3.5 (§3.2 最初の定義の直後参照)**.** $q\colon [c,d]\to\mathbb{C}$ を別のパラメータ付けとすると, パラメータの取り替え $\varphi\colon [c,d]\to[a,b]$ が存在するから, $t=\varphi(s)$ と変数変換して

$$\int_c^d f(q(s))q'(s)\,ds=\int_c^d f(p(\varphi(s)))p'(\varphi(s))\varphi'(s)\,ds=\int_a^b f(t)p'(t)\,dt.$$

解答 3.6. 定理 3.2.4 の証明を参照せよ.

解答 3.7. $z(t)=re^{it}$ と C をパラメータ付けると

$$\int_C z^n\,dz=\int_0^{2\pi} r^n e^{int}\cdot ire^{it}\,dt=ir^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}\,dt=\begin{cases}0 & (n\neq -1)\\ 2\pi i & (n=-1)\end{cases}.$$

解答 3.8. $z(t)=re^{it}$ と C をパラメータ付けると

$$\begin{aligned}\int_C \frac{1}{(z-a)(z-b)}\,dz&=\int_0^{2\pi}\frac{1}{(re^{it}-a)(re^{it}-b)}\cdot ire^{it}\,dt=\frac{1}{a-b}\int_0^{2\pi}\left(\frac{ire^{it}}{re^{it}-a}-\frac{ire^{it}}{re^{it}-b}\right)dt\\&=\frac{1}{a-b}\left(\left[\mathrm{Log}(re^{it}-a)\right]_0^{2\pi}-\left[\mathrm{Log}(re^{it}-b)\right]_0^{2\pi}\right)=\frac{1}{a-b}\,(2\pi i-0)=\frac{2\pi i}{a-b}.\end{aligned}$$

最後から二番目の等号について (講義ノートの解答の図も参照): $|a|<r$ より $re^{it}-a$ の偏角は $t:0\to 2\pi$ で 2π 増えるので $\left[\mathrm{Log}(re^{it}-a)\right]_0^{2\pi}=2\pi$. $r<|b|$ より $re^{it}-b$ の偏角は $t:0\to 2\pi$ で不変だから $\left[\mathrm{Log}(re^{it}-b)\right]_0^{2\pi}=0$.

解答 3.9. 積分は

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} it\cdot ie^{it}\,dt=-\int_{-\pi/2}^{\pi/2} te^{it}\,dt=\left[(it-1)e^{it}\right]_{-\pi/2}^{+\pi/2}=-2i.$$