現代数学基礎 CⅢ　10 月 12 日分課題解答

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

問題. 虚数単位を i で表す. 複素関数 $f(z)$ が複素数 $z=z_0$ で正則である, つまり極限

$$f'(z_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$$

が存在すると仮定する. また $z=x+iy$ を複素変数 z の実部・虚部への分解とし, 関数 f を実二変数関数 $f(z)=f(x,y)$ とみなして x および y で偏微分したものをそれぞれ $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ と書く. そして $z_0=x_0+iy_0$ を z_0 の分解とする.

(1) 極限を取るときに用いる複素数 h が実数 $\mathbb{R}$ 上を動いて 0 に近づく場合, $f'(z_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ であることを示せ.

(2) 極限を取るときに用いる複素数 h が集合 $i\mathbb{R}=\{iy \mid y\in\mathbb{R}\}$ 上を動いて 0 に近づく場合, $f'(z_0)=-i\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ であることを示せ.

(3) 前二問の結果から $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=-i\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ である. この等式から Cauchy-Riemann 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0),\quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)=-\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$$

を導け. 但し実関数 $u(x,y),v(x,y)$ は複素関数 $f(z)$ の実部と虚部への分解 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ から定まるものである.

解答. (1) $h=x\in\mathbb{R}$ と表し, f を実関数とみなして $f(z)=f(x,y)$ と表せば

$$f'(z_0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(z_0+x)-f(z_0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x_0+x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x}=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0).$$

(2) $h=iy\in i\mathbb{R}$ と表すと

$$f'(z_0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(z_0+iy)-f(z_0)}{iy}=\lim_{y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+y)-f(x_0,y_0)}{iy}=-i\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).$$

(3) $f_x\coloneqq\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$, $u_x\coloneqq\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)$ 等と略記する. 前二問の結果 $f_x=-if_y$. 一方で $f=u+iv$ だから $f_x=u_x+iv_x$, $-if_y=-iu_y+v_y$. よって

$$u_x+iv_x=v_y-iu_y.$$

u,v が実関数であることに注意して, 両辺の実部と虚部を比較すると $u_x=v_y$, $v_x=-u_y$, つまり Cauchy-Riemann 方程式を得る.

コメント. 3 点満点で採点しました. 提出者全員が正解で, 平均点は 3.0 点でした. 問題の内容は春学期の復習でした.