現代数学基礎 CIII　10 月 12 日分演習問題

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
連絡先: yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2023WC3.html

問題 2.1 (講義ノートの例 2.1.3)**.** 原点中心で半径 1 の開円板 $D(0,1)$ 上で, 関数列 $\{f_n(z) \coloneqq \sum_{k=0}^{n} z^k\}_{n=0}^{\infty}$ が関数 $f(z) \coloneqq \frac{1}{1-z}$ に広義一様収束することを示せ.

問題 2.2 (講義ノートの命題 2.2.2 (1) 証明)**.** 主張「原点中心の冪級数 $a(z)$ が $w \in \mathbb{C}$ で収束するなら, 原点中心の開円板 $D(0,|w|)$ 上で $a(z)$ が広義一様収束する」について, $0 < r < |w|$ を満たす任意の実数 r に対し, 閉円板 $K \coloneqq \overline{D(0,r)}$ 上で $a(z)$ が一様収束することを示せば主張が従うことを説明せよ.

問題 2.3 (講義ノートの命題 2.2.2 (2))**.** 原点中心の冪級数 $a(z)$ が $u \in \mathbb{C}$ で収束しなければ, $|z| > |u|$ を満たす任意の $z \in \mathbb{C}$ で $a(z)$ は収束しないことを示せ.

問題 2.4. $c \in \mathbb{C}$ とする. 中心 0 の冪級数 $a(z) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} c^n z^n$ の収束半径を求めよ.

問題 2.5 (講義ノートの命題 2.3.6, 問題 2.3.5)**.** 次の一般二項定理を証明せよ: 任意の $\alpha \in \mathbb{C}$ と $|z| < 1$ なる $z \in \mathbb{C}$ に対して

$$(1+z)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n, \quad \binom{\alpha}{n} \coloneqq \begin{cases} \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)/n! & (n \geq 1) \\ 1 & (n = 0) \end{cases}.$$

解答 2.1. 任意の空でない有界閉集合 $K \subset D \coloneqq D(0,1)$ について,

$(*)$ $K \subset D(0,r)$ かつ $0 < r < 1$ となる実数 r が存在する

から, 任意の $z \in K$ に対して $|f_n(z) - f(z)| = \left|\frac{1-z^{n+1}}{1-z} - \frac{1}{1-z}\right| \le \frac{r^{n+1}}{1-r}$, つまり $\|f_n - f\|_K \le \frac{r^{n+1}}{1-r}$ となって, $0 < r < 1$ より $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_K = 0$ が従う. f_n は D 上連続だから, 講義ノートの命題 2.2.2 より $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ は D 上 f に広義一様収束する.

$(*)$ の証明: 絶対値を取る函数 $a\colon K \to \mathbb{R}$, $a(z) \coloneqq |z|$ は, 実部・虚部への分解を用いて $a(x+iy) = \sqrt{x^2+y^2}$ と書けば分かるように, $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ の有界閉集合 K から $\mathbb{R}$ への連続写像である. 有界閉集合 (Euclid 位相ではコンパクト集合と同値) の連続写像による像は有界閉集合だから, $a(K) \subset \mathbb{R}$ は有界閉集合. $\mathbb{R}$ の有界閉集合は最大値を持つから, $r \coloneqq \max a(K) \in \mathbb{R}$ が定まる. $\emptyset \ne K \subset D(0,1)$ より $0 < r < 1$.

解答 2.2. $f_n(z)$ を $a(z)$ の n 項目までの部分和として, 任意の有界閉部分集合 $K' \subset D(0,|w|)$ について $\lim_{n\to\infty} \|a - f_n\|_{K'} = 0$ を示せば良いが, $K' \subset K \coloneqq \overline{D(0,r)}$ かつ $0 < r < |w|$ となる実数 r が存在し, $\|a - f_n\|_{K'} \le \|f - f_n\|_K$ だから, $\lim_{n\to\infty} \|a - f_n\|_K = 0$, すなわち K 上で一様収束することを示せば良い.

解答 2.3. $|z| > |u|$ を満たす $z \in \mathbb{C}$ で $a(z)$ が収束するなら, $u \in D(0,|z|)$ だから (1) より $a(u)$ が収束して矛盾する.

解答 2.4. ratio test (講義ノートの命題 2.2.5) を $a_n = c^n$ に用いると, $|a_n/a_{n+1}| = 1/|c| \xrightarrow{n\to\infty} 1/|c|$ となって極限が存在するので, 収束半径は $1/|c|$ ($c = 0$ の時は ∞).

解答 2.5. $f(z) \coloneqq (1+z)^\alpha = \exp(\alpha \operatorname{Log}(1+z))$ を微分すると $f'(z) = \alpha(1+z)^{-1} f(z)$. 一方 $g(z) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$ の収束半径は $\lim_{n\to\infty} \left|\binom{\alpha}{n} / \binom{\alpha}{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n+1}{\alpha-n}\right| = 1$. よって $|z| < 1$ では $g'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n\binom{\alpha}{n} z^{n-1}$. ここで二項係数の定義から $n\binom{\alpha}{n} + (n+1)\binom{\alpha}{n+1} = \alpha\binom{\alpha}{n}$ となることを用いると $(1+z)g'(z) = \alpha g(z)$ が示せる. すると $(g(z)/f(z))' = 0$ が示せて, 講義ノートの事実 2.3.4 を $\Omega = D(0,1)$ 及び函数 g/f に適用すると $g(z)/f(z) = g(0)/f(0) = 1$. よって $|z| < 1$ なら $g(z) = f(z)$.