§2 巾級数と正則函数　　10・12・1

§2.1. 一様収束

$[0,\infty] := \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$. $\forall r \in \mathbb{R}_{\geq 0}.\ r < \infty$

$\forall S \subset \mathbb{R}_{\geq 0}\ \exists! \sup S \in [0,\infty]$ Sの上限

s.t. $\forall s \in S,\ s \leq \sup S$ & $\forall r \in [0,\infty],\ r < \sup S \Rightarrow \exists s \in S,\ r < s$.

$\mathbb{Z}_{\geq 0}$

Dfn. 2.1.1. $\phi \neq U \subset \mathbb{C}$: 開. $f, f_n : U \to \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{N})$

$\phi \neq V \subset U$ $\|f - f_n\|_V := \sup\{|f(z) - f_n(z)| \mid z \in V\} \in [0,\infty]$

(1) 函数列 $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ が f に V上一様収束 $:\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_V = 0$

(2) 〃 〃 U上広義一様収束

$:\Longleftrightarrow 0 \neq \forall K \subset U$, 有界閉, $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_K = 0$

$\exists r \in \mathbb{R}_{>0}.\ K \subset D(0,r)$

Prp. 2.1.2 $\phi \neq U \subset \mathbb{C}$: 開. $f_n : U \to \mathbb{C}$. 連続 $(n \in \mathbb{N})$

$\forall z \in U\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0}\ \forall w \in D(z,\delta)\ |f_n(w) - f_n(z)| < \varepsilon$

函数列 $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ が $f : U \to \mathbb{C}$ に広義一様収束. $\Rightarrow f$ は U上連続.

(∵) $\forall z \in U, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ を固定.

Uは開だから, $\exists r \in \mathbb{R}_{>0}$, $D(z, 2r) \subset U$.

$K := \overline{D(z, r)}$ とすると $K \subset U$. 広義一様収束の仮定から

($\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ に対し) $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$ $\|f - f_n\|_K < \varepsilon$ ①

f_n は U上連続ゆえ, (ε に対し) $\exists \delta \in \mathbb{R}$, $0 < \delta < r$. $D(z,\delta) \subset U$

$\forall w \in D(z,\delta)$ $|f_n(w) - f_n(z)| < \varepsilon$ ②

問1.

$D(z,\delta) \subset K \subset U$ より $\forall w \in D(z,\delta)$ $|f(w) - f(z)| \leq \underset{①}{|f(w) - f_n(w)|} + \underset{②}{|f_n(w) - f_n(z)|} + \underset{①}{|f_n(z) - f(z)|}$

$\leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$. □

E.g. 2.1.3. $\{f_n(z) := \sum_{k=0}^{n} z^k \mid n \in \mathbb{N}\}$ は $f(z) := \frac{1}{1-z}$ に $D(0,1)$上 広義一様収束

(∵) $0 \neq \forall K \subset D(0,1)$, 有界閉 $0 < \exists r < 1$, $K \subset D(0,r)$.

∴ $\forall z \in K$. $|f(z) - f_n(z)| = \left|\frac{z^{n+1}}{1-z}\right| < \frac{r^{n+1}}{1-r} \to 0\ (n \to \infty)$.

よって $\{f_n\}_n$ は f に $D(0,1)$上広義一様収束. f_n は連続. Prp.2.1.2より. □

§2.2. 巾級数と正則函数

$\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{C}$

$a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n$: 係数 $\{a_n\}_n$, 中心 α の巾級数.

- $a(z)$ が $z = z_0 \in \mathbb{C}$ で収束/絶対収束する (自明)
- $\phi \neq V \subset \mathbb{C}$. $a(z)$ が V 上一様収束する :⟺ V の各点で $a(z)$ は収束し,
  $\{f_n(z) := \sum_{k=0}^{n} a_k (z-\alpha)^k \mid n \in \mathbb{N}\}$ が $a(z)$ に V 上一様収束する.
- $\phi \neq U \subset \mathbb{C}$, 開. $a(z)$ が U 上広義一様収束する :⟺ U の各点で —〃—
  $\{f_n(z) :=$ —〃— $\mid n \in \mathbb{N}\}$ —〃— V 上広義一様収束.

Prp. 2.2.2. $a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$: 中心 0 の巾級数

(1) $a(z)$ が $w \in \mathbb{C}$ で収束するなら, $D(0, |w|)$ 上で $a(z)$ は絶対かつ広義一様収束

(2) 〃 しなければ, $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| > |w|$ で $a(z)$ は収束しない.

(∵) (1) 前半: $w \neq 0$ と仮定しない. $a(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ が収束するので,

$\exists M \in \mathbb{R}_{>0}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n w^n| \leq M$.

よって $\forall z \in D(0, |w|)$, $c := |z|/|w| < 1$, $|a_n z^n| = |a_n w^n| \cdot |z/w|^n \leq M c^n$

$\therefore \sum_{k=m}^{n} |a_k z^k| \leq M \cdot c^m \cdot \frac{1}{1-c} \xrightarrow{m \to \infty} 0$, i.e. z で $a(z)$ は絶対収束

後半: $0 < \forall r < |w|$, $K := \overline{D(0,r)}$ 上で一様収束することを示せばよい.

問2

$f_n(z) := \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ として. $\forall z \in K$ で

$|a(z) - f_n(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k z^k| \leq M c^{n+1}/(1-c)$, $c := \frac{|z|}{|w|} < 1$

$\therefore \lim_{n\to\infty} \|a - f_n\|_K = 0$

(2) : 問3. □

Cor. 2.2.3. 中心 0 の巾級数 $a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ に対し

$R := \sup\{|w| \in \mathbb{R} \mid w \in \mathbb{C}, a(w) \text{は収束する}\} \in [0, \infty]$

とすると $\begin{cases} a(z) \text{は} D(0,R) \text{上絶対かつ広義一様収束する.} \\ |z| > R \text{なら} a(z) \text{は収束する.} \end{cases}$

更に、この二条件をみたす $R \in [0,\infty]$ は一意 (証明略) □

Dfn.2.2.4 Cor.2.2.3の $R\in[0,\infty]$ を巾級数 $a(z)$ の収束半径という。
$D(0,R)$ を $a(z)$ の収束円板という。 □

Prp.2.2.5. (ratio test) $a(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ について、
$\lim_{n\to\infty}|a_n/a_{n+1}|\in[0,\infty]$ が存在すれば、それが収束半径。
但し ∞ は $|a_n/a_{n+1}|$ が発散する場合。 (証明略) □

Eg.2.2.6 $\exp(z):=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n$
$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n!}/\frac{1}{(n+1)!}\right|=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty$ より、$\forall z\in\mathbb{C}$ で収束 □

Non-eg. 2.2.8. $a(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}z^{2n}=\sum_{m=0}^{\infty}a_m z^m$, $a_{2n+1}=0$, $a_{2n}=\frac{1}{(2n)!}$
より $a_m/a_{m+1}=\begin{cases}0 & (m:\text{奇数})\\ \text{不定} & (m:\text{偶数})\end{cases}$ で、極限はない…

Fact.2.2.9. (Cauchy-Hadamard) $\forall a(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$,
$R=1/\overline{\lim_{n\to\infty}}|a_n|^{1/n}$ 　但し $1/0:=\infty$, $1/\infty:=0$ □

$\overline{\lim}_{n\to\infty}b_n \overset{\text{def}}{=} \limsup_{n\to\infty}b_n:=\lim_{n\to\infty}\sup\{b_m\mid m\geq n\}$
← n に関して単調減少

Eg.2.2.10 (3) $a(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^{2n}/(2n)!$
$R=1/(\overline{\lim_{m\to\infty}}|a_m|^{1/m})=1/\lim_{n\to\infty}(1/(2n)!)^{1/2n}=1/0=\infty$ □

Thm.2.2.11. 巾級数 $a(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ は収束円板上での正則函数 a を定める。
$\forall z\in D(0,R)$. $a'(z)=\sum_{n=0}^{\infty}na_n z^{n-1}$.
更に、$\sum_{n=0}^{\infty}na_n z^{n-1}$ の収束半径は R. (証明略) □

Cor.2.2.12. 巾級数は収束円板上で任意回複素微分可能な函数を定める □

§2.3. 初等函数

指数函数 $e^z := \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$

三角 〃 $\cos z := \frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$,

$\sin z := \frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$, $\tan z := \cdots$

$(x,y)=(\cos z, \sin z)$. $x^2+y^2=1$

双曲線 〃 $\cosh z := \frac{1}{2}(e^{z}+e^{-z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n}$

$\sinh z := \frac{1}{2}(e^{z}-e^{-z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1}$, $\tanh z := \cdots$

$(x,y)=(\cosh z, \sinh z)$ $x^2-y^2=1$: 双曲線

対数函数: $\exp(z)$の逆函数のこと.

: 可算無限個の候補がある: $z=re^{i\theta}$, $r>0$, $-\pi<\theta\leq\pi$. (※)

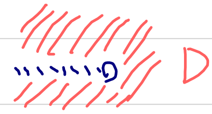
$\log z := \log r + i(\theta+2\pi n)$ $(n\in\mathbb{Z})$

<u>Dfn.2.3.2.</u> $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$に対し、(※)をみたす$(r,\theta)$が一意に決まる.

これを用いて $\mathrm{Log}\, z := \log r + i\theta$. (:対数の主値) □

↑実対数函数

<u>Prp.2.3.3.</u> $\mathrm{Log}\, z$ は $D := \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_{\leq 0}$ 上の正則函数.



$|z|<1$ なら $\mathrm{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$ □

↑ $1+z\in D$

(∵) 後半だけ. $\exp(\mathrm{Log}(1+z)) = 1+z$ の両辺を微分して

$\exp(\mathrm{Log}(1+z))\cdot \mathrm{Log}'(1+z) = 1$ $\therefore \mathrm{Log}'(1+z) = \frac{1}{1+z} \overset{|z|<1}{=} \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$

↑合成函数の微分

ratio test より $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$ は $|z|<1$で正則で、Thm.2.2.11より 微分は $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$

ここで <u>Fact.2.3.4.</u> 領域 $D\subset\mathbb{C}$上の正則函数fが, $\forall z\in D$ $f'(z)=0$ なら定数

を $D=D(0,1)$, $f(z)=\mathrm{Log}(1+z) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$ に用いると、fは定数.

しかし $f(0) = 0-0 = 0$. □

<u>Dfn.2.3.5</u> $\alpha\in\mathbb{C}$, $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$. $z^\alpha := \exp(\alpha\cdot \mathrm{Log}\, z)$

z^α は $D=\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_{\leq 0}$ 上の正則函数. □