現代数学基礎 CⅢ　10 月 05 日分課題解答

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

問題. 複素変数 $z = x + iy$ の正則関数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ の実部が $u(x, y) = x^n + y^n$ (n は正の整数) だとする. このような n と f を全て求めよ.

解答. Cauchy-Riemann 方程式 $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ から $v_y = nx^{n-1}$, $v_x = -ny^{n-1}$. 前者より

$$v(x, y) = nx^{n-1}y + g(x) \quad (g(x) \text{ は } x \text{ のみの関数})$$

と書けて, すると後者から

$$n(n-1)x^{n-2}y + g'(x) = -ny^{n-1}. \tag{$*$}$$

この恒等式が成立するのは $n = 1$, $g'(x) = -1$ の時のみ. すると $g(x) = -x + c$ (c は実数定数) となって, $v(x, y) = -x+y+c$. 従って $f(z) = u(x, y)+iv(x, y) = x+y-ix+iy+ic = (x+y)+i(y-x+c) = (1-i)z+ic$. 以上より答えは

$$n = 1, \quad f(z) = (1-i)z + ic = (x+y) + i(y-x+c) \quad (c \text{ は実数定数}).$$

コメント. 以下の項目を各々 1 点として, 3 点満点で採点しました.

- Cauchy-Riemann 方程式を正しく理解しているか.
- Cauchy-Riemann 方程式を利用して恒等式 $(*)$ を導けているかどうか.
- 恒等式から n の値と $v(x, y)$ を求めることができているかどうか.

平均点は 2.4 点でした.

最初の項目はどの答案もクリアしていました. 満点でない答案の殆どは, 恒等式 $(*)$ から $n = 1$ を導出できていませんでした. この導出の過程を詳しく書くと

- $n \geq 3$ だと左辺第一項が x, y 両方を含むので, x しか含まない第二項 $g'(x)$ と打ち消しあうことはない. 従って左辺は x, y 両方に依存する関数であり, y にしか依存しない右辺と一致することはない.
- $n = 2$ だと左辺は $y + g'(x)$ で右辺は $-2y$. これらが等しいなら $g'(x) = -3y$ となり, $g(x)$ が x のみの関数であることと矛盾する.
- $n = 1$ なら左辺は $g'(x)$ で右辺は $-y$. 後は解答と同様.

他の減点された答案として, 実定数 c が抜けているものが少しありました.

以上です.