現代数学基礎 CIII　10 月 05 日分演習問題

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
連絡先: yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2023WC3.html

問題 1.1 (講義ノートの問題 1.1.1)**.** 任意の部分集合 $S \subset \mathbb{C}$ に対し $S^\circ \subset S$ であることを示せ.

問題 1.2 (講義ノートの問題 1.1.2)**.** 開円板が開集合であることを示せ.

問題 1.3 (講義ノートの問題 1.1.3)**.** 閉円板が閉集合であることを示せ.

問題 1.4 (講義ノートの問題 1.1.4)**.** 任意の部分集合 $S \subset \mathbb{C}$ に対して S° が開集合であることを示せ.

問題 1.5 (講義ノートの問題 1.1.5)**.** 空集合 $\emptyset$ と複素数平面 $\mathbb{C}$ がそれぞれ開集合かつ閉集合であることを示せ.

問題 1.6 (講義ノートの例 1.2.1 (1))**.** 任意の多項式 $f(z) \in \mathbb{C}[z]$ について, それが定める関数 $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が整関数であることを示せ.

問題 1.7 (講義ノートの例 1.2.1 (3))**.** $\mathbb{C}$ 上の関数 $f(z) := \overline{z}$ は, どの $z \in \mathbb{C}$ においても正則でないことを示せ.

問題 1.8 (講義ノートの問題 1.3.1)**.** Cauchy-Riemann 方程式 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ と $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ が同値であることを示せ.

解答 1.1. $z \in S^\circ$ なら適当な $r \in \mathbb{R}_{>0}$ が取れて $D(z,r) = \{w \in \mathbb{C} \mid |w-z| < r\} \subset S$ となる. $z \in D(z,r)$ だから $z \in D(z,r) \subset S$, つまり $z \in S$ である. よって $S^\circ \subset S$.

解答 1.2. 中心 $z \in \mathbb{C}$, 半径 $R \in \mathbb{R}_{>0}$ の開円板 $S \coloneqq D(z,R)$ の任意の点 $w \in S$ を取る. $r \coloneqq R - |w-z| \in \mathbb{R}_{>0}$ として, 中心 w, 半径 r の開円板 $D(w,r)$ を考える. $D(w,r) \subset S$ が示せれば $w \in S^\circ$ となり, $w \in S$ は任意に取っていたので $S \subset S^\circ$. 問題 1.1 の結果と合わせて $S^\circ = S$, つまり $S = D(z,R)$ は開集合である.

$D(w,r) \subset S$ を示そう. 任意の点 $x \in D(w,r)$ を取ると, 三角不等式より $|x-z| \leq |x-w| + |w-z| < r + |w-z| = R$ となるので $x \in D(z,R) = S$. x は任意に取っていたので $D(w,r) \subset S$ である.

解答 1.3. 中心 $z \in \mathbb{C}$, 半径 $R \in \mathbb{R}_{>0}$ の閉円板 $\overline{D(z,R)}$ について, その補集合 $S \coloneqq \overline{D(z,R)}^c$ の任意の点 $w \in S$ を取る. $r \coloneqq |w-z| - R \in \mathbb{R}_{>0}$ として, 中心 w, 半径 r の開円板 $D(w,r)$ を考える. $D(w,r) \subset S$ が示せれば $w \in S^\circ$ となり, $w \in S$ は任意に取っていたので $S \subset S^\circ$. 問題 1.1 の結果と合わせて $S^\circ = S$, つまり $S^c = \overline{D(z,R)}$ は開集合である.

$D(w,r) \subset S$ を示そう. 任意の点 $x \in D(w,r)$ を取ると, 三角不等式より $|x-z| \geq |z-w| - |x-w| > |z-w| - r = R$ となるので $x \in S$. x は任意に取っていたので $D(w,r) \subset S$ である.

解答 1.4. 任意に $z \in S^\circ$ を取ると, 適当な $R \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在して $D(z,R) \subset S$. もし $D(z,R) \subset S^\circ$ が示せれば, $z \in D(z,R)$ より $z \in S^\circ$ が従い, $z \in S^\circ$ は任意に取っていたから $S^\circ \subset (S^\circ)^\circ$ が従い, 問題 1.1 の結果と合わせて $S^\circ = (S^\circ)^\circ$, つまり S° が開集合であることが従う.

$D(z,R) \subset S^\circ$ を示そう. 任意の $w \in D(z,R)$ を取り, $r \coloneqq \min\{|w-z|, R - |w-z|\}$ として, 中心 w, 半径 r の開円板 $D(w,r)$ を考える. $D(w,r) \subset S$ が示せれば $w \in S^\circ$ が従い, $w \in D(z,R)$ は任意に取っていたから $D(z,R) \subset S^\circ$ が従う.

$D(w,r) \subset S$ を示そう. 任意の $x \in D(w,r)$ について, 三角不等式より $|x-z| \leq |x-w| + |w-z| < r + |w-z| \leq R$ となるので $x \in D(z,R) \subset S$. $x \in D(w,r)$ は任意に取っていたので $D(w,r) \subset S$.

解答 1.5. $\mathbb{C}$ が開集合であること: 任意の点 $z \in \mathbb{C}$ について, 任意に $r \in \mathbb{R}_{>0}$ を取れば $D(z,r) \subset \mathbb{C}$ となるので $z \in (\mathbb{C})^\circ$. よって $\mathbb{C} \subset (\mathbb{C})^\circ$ であり, 問題 1.1 の結果と合わせて $\mathbb{C}$ は開集合である.

$\emptyset$ が閉集合であること: $\emptyset^c = \mathbb{C}$ と $\mathbb{C}$ が開集合であることから従う.

$\emptyset$ が開集合であること: $\emptyset$ には点がないので, 開集合の条件が自動的に成立する.

$\mathbb{C}$ が閉集合であること: $\mathbb{C}^c = \emptyset$ が開集合であることから従う.

解答 1.6. $f(z) = z$ は整関数. 実際, 任意の $z \in \mathbb{C}$ において $\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{h}{h} = 1 \xrightarrow{h \to 1} 1$.

すると命題 1.2.2 (2) を繰り返し用いて, $f(z) = z^n$ が整関数であることが従う.

また, 整関数全体のなす集合は $\mathbb{C}$ 線形空間である (c.f. 命題 1.2.2 (1)) ことから, z^n 達の線形結合, つまり任意の多項式も整関数である.

解答 1.7. 任意の $z \in \mathbb{C}$ において $\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{\overline{h}}{h}$ となるが, h が実数のまま 0 に近づければ $\frac{\overline{h}}{h} = \frac{h}{h} = 1$ であり, h が純虚数のまま 0 に近づければ $\frac{\overline{h}}{h} = \frac{-h}{h} = -1$. よって極限 $\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ は存在しない. つまり $f(z) = \overline{z}$ はどの $z \in \mathbb{C}$ においても正則ではない.

解答 1.8. Cauchy-Riemann 方程式を $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ と略記し, 後半の等式を $\overline{\partial} \coloneqq \frac{\partial}{\partial \overline{z}}$ を使って $\overline{\partial} f = 0$ と略記すると, $\overline{\partial} f = \big(u_x + iv_x + i(u_y + iv_y)\big)/2 = (u_x - v_y)/2 + i(u_y + v_x)/2$ となるので, 実部と虚部を比較して $\overline{\partial} = 0 \iff u_x = v_y,\ u_y = -v_x$ である.