§1 複素微分 　　　　　　10・5・1

§1.1. 複素数平面

用語・記号

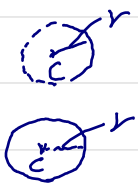
$\mathbb{C} := \{\text{複素数}\} \supset \mathbb{R} := \{\text{実数}\} \supset \mathbb{Q} := \{\text{有理数}\} \supset \mathbb{Z} := \{\text{整数}\} \supset \mathbb{N} := \{0, 1, 2, \cdots\}$

$\mathbb{N} = \mathbb{Z}_{\geq 0}$

(1) $c \in \mathbb{C},\ r \in \mathbb{R}_{>0}$

$D(c, r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| < r\}$: 中心c, 半径rの開円板

$\overline{D(c, r)} := \{\ 〃 \mid |z - c| \leq r\}$: 〃 閉円板



(2) $S \subset \mathbb{C}$. $z \in \mathbb{C}$ がSの内点 $:\Longleftrightarrow \exists r \in \mathbb{R}_{>0}\ D(z, r) \subset S$

$S^\circ := \{z \in \mathbb{C} \mid z$は$S$の内点$\}$: Sの内部

(3) $S \subset \mathbb{C}$ が開集合 $:\Longleftrightarrow S^\circ = S$.

(4) 〃 閉〃 $:\Longleftrightarrow S^c := \mathbb{C} \setminus S$ が開集合.

問1 $\forall S \subset \mathbb{C},\ S^\circ \subset S$

問2 開円板は開集合.

問3 閉円板は閉 〃

問4 $\forall S \subset \mathbb{C}$, S°は開集合.

問5 $\emptyset$と$\mathbb{C}$はそれぞれ開かつ閉.

§1.2. 複素微分.

Def $U \subset \mathbb{C}$：開集合. $f : U \to \mathbb{C}$：(複素)函数

(1) f が $z \in U$ で正則 $:\Leftrightarrow$ 極限 $\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ が存在　$h\to 0$ は $\mathbb{C}$ での極限!!

このとき $f'(z) := \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ を f の z における(正則)微分と呼ぶ.

(2) f が U 上正則 $:\Leftrightarrow$ f が $\forall z \in U$ で正則

(3) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が整函数 $:\Leftrightarrow$ f が $\mathbb{C}$ 上正則.

Prp. 1.2.2. $U \subset \mathbb{C}$：開集合. $f, g : U \to \mathbb{C}$：正則

(1)' $a, b \in \mathbb{C}$. $af+bg : U \to \mathbb{C}$ は正則で $(af+bg)' = a\cdot f' + b\cdot g'$

で $(af+bg)(z) := a\cdot f(z) + b\cdot g(z)$

{U 上の正則函数} は $\mathbb{C}$ 線形空間.

(2) $f\cdot g$ は U 上正則で $(fg)' = f'g + fg'$

で $(fg)(z) := f(z)\cdot g(z)$

(3) $z \in U$ $g(z) \neq 0$ なる f/g は z で正則で, $(f/g)' = f'/g - fg'/g^2$ □

(1) $f+g$ は U 上正則で $(f+g)' = f' + g'$

Exm. 1.2.1. (問6,7) (1) 任意の多項式(函数) $f(z) := a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{C}[z]$ は整函数. $f'(z) = n a_n z^{n-1} + (n-1) a_{n-1} z^{n-2} + \cdots + a_1$

$\because$ $f(z) = z$ は整函数. 実際. $\forall z \in \mathbb{C}$ で

$(f(z+h) - f(z))/h = h/h = 1 \xrightarrow{h\to 0} 1$

なので 正則. そして $f'(z) = 1$.

すると (2) をくり返し用いて. $f(z) = z^n$ は整函数で $f'(z) = nz^{n-1}$

あとは (1) 〃 $f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ は整函数で $f'(z) = \cdots$.

(3) $f(z) = \bar{z}$ について.

$(f(z+h) - f(z))/h = \bar{h}/h$ の $h\to 0$ での極限は存在しない

実際. $h \in \mathbb{R}$ で極限をとれば $\bar{h}/h = h/h = 1 \longrightarrow 1$.

$h \in i\mathbb{R}$ 〃 $\bar{h}/h = -h/h = 1 \longrightarrow -1$

よって $f(z) = \bar{z}$ は $\forall z \in \mathbb{C}$ において正則ではない. □

§1.3. Cauchy-Riemann方程式

Thm 1.3.1. $\phi \neq U \subset \mathbb{C}$：開集合

(1) $f: U \to \mathbb{C}$, の実部と虚部への分解を

$U \ni z = x + iy$, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

とする。$z_0 = x_0 + iy_0 \in U$ において f が正則なら

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{cases}$$

Cauchy-Riemann方程式.
(CR 〃)

(2) $U \subset \mathbb{R}^2$ とみなし、$u, v: U \to \mathbb{R}$ が

$\begin{cases} \forall (x_0, y_0) \in U \text{ で連続微分可能} \\ \quad〃 \qquad \text{CR方程式が成立} \end{cases}$

をみたすなら、$f(z) := u(x,y) + iv(x,y)$ $(z = x + iy)$

で定まる $f: U \to \mathbb{C}$ は U 上正則 □

$$\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

正則微分 　　　　　　非正則微分

Prp. 1.3.2. $U \subset \mathbb{C}$：開. $f: U \to \mathbb{C}$

f が $z_0 \in U$ で正則なら $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$ かつ $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = f'(z_0)$ □

問8. CR方程式 $\Longleftrightarrow$ $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$