現代数学基礎 BI　定期試験解答

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

問題 1. V と W を体 $\mathbb{K}$ 上の線形空間とし, 線形写像 $f\colon V \to W$ とその双対写像 $f^*\colon W^* \to V^*$ を考える.

(1) 次の同値を示せ: f が単射 $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{0\}$.

(2) f が全射なら f^* が単射であることを示せ.

解答. (1) f は線形写像だから $f(0)=0$. ($\Rightarrow$) $v \in V \setminus \{0\}$ なら $f(v) \neq f(0) = 0$ なので $\operatorname{Ker} f = f^{-1}(0) = \{0\}$. ($\Leftarrow$) 相違なる任意の二元 $v, v' \in V$ について, $v - v' \neq 0$ と仮定から $f(v-v') \neq 0$. f は線形写像だから $f(v-v') = f(v) - f(v')$ なので, $f(v) \neq f(v')$. よって f は単射.

(2) $\varphi \in W^*$ が $f^*(\varphi) = 0$ を満たすなら, 任意の $v \in V$ に対して $\bigl(f^*(\varphi)\bigr)(v) = 0$. $\bigl(f^*(\varphi)\bigr)(v) = \varphi\bigl(f(v)\bigr)$ と f の全射性から, 任意の $w \in W$ に対して $\varphi(w) = 0$. よって $\varphi = 0$ であり, (1) から f^* は単射.

(別解) $\varphi, \psi \in W^*$ が $f^*(\varphi) = f^*(\psi)$ を満たすと仮定する. f が全射なので, 任意の $w \in W$ に対し $f(v) = w$ となる $v \in V$ が存在するが, すると $\varphi(w) = \varphi\bigl(f(v)\bigr) = \bigl(f^*(\varphi)\bigr)(v) = \bigl(f^*(\psi)\bigr)(v) = \psi\bigl(f(v)\bigr) = \psi(w)$. よって $\varphi = \psi$ であり, f^* の単射性が示せた.

コメント. 各小問を 15 点として, 計 30 点満点で採点しました. 平均点は 18.2 点でした.

(1) で使うはずの “f は線形写像なので $f(0)=0$” に言及していない場合は 5 点減点しました.

(2) で W^* の元を ω と置いているのだけれど, ω と w の書き分けができていない答案が目立ちました.

(1) は講義中に何度も用いた主張ですし, 講義ノートの問題 1.4.1 や命題 5.1.5 (1) で扱っています. (2) は別解に示したように, f が線形写像であることは本質的には用いない主張です. 余裕がある人は一般の写像 f に対する主張に拡張してみて下さい. なお, この主張は講義ノートの命題 8.2.8 (1), および問題 8.2.2 (2) の半分です. 線形写像に対しては, 逆の主張も成立します.

問題 2. $\mathbb{K}$ を標数 0 の体, n を 2 以上の整数とし, $V = \mathbb{K}^n$ を $\mathbb{K}$ 上の n 次元数ベクトル空間とする. また V の標準基底を $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表し, $W \subset V$ を $w \coloneqq e_1 + \cdots + e_n \in V$ が生成する V の 1 次元部分空間とする. 商空間 V/W への標準全射を $p\colon V \to V/W$ と表し, $v \in V$ の像を $[v] \coloneqq p(v) \in V/W$ と表す.

(1) $\alpha_i \coloneqq [e_i - e_{i+1}] \in V/W$ とおく. $\{\alpha_i \mid i = 1, \dots, n-1\}$ が V/W の基底であることを示せ.

(2) $[e_1] \in V/W$ を (1) の基底の線形結合で表せ.

解答. (1) $\dim(V/W) = \dim V - \dim W = n-1$ だから, α_i 達の線形独立性を示せば十分. $\sum_{i=1}^{n-1} c_i \alpha_i = 0$, $c_i \in \mathbb{K}$ とすると, $0 = \sum_{i=1}^{n-1} c_i \alpha_i = [\sum_{i=1}^{n-1} c_i(e_i - e_{i+1})]$ だから $\sum_{i=1}^{n-1} c_i(e_i - e_{i+1}) \in W$. 従って, ある $c \in \mathbb{K}$ が存在して, V において

$$\sum_{i=1}^{n-1} c_i(e_i - e_{i+1}) = c(e_1 + \cdots + e_n).$$

e_i 達は V の基底なので $c_1 = c$, $c_2 - c_1 = c$, $c_3 - c_2 = c$, $\dots$, $c_{n-1} - c_{n-2} = c$, $-c_{n-1} = c$. この連立方程式を解くと $c_i = ic$ $(i = 1, \dots, n-2)$, $c_{n-1} = (n-1)c = -c$ となり, $\mathbb{K}$ の標数が 0 であることから $c = \frac{0}{n} = 0$, $c_1 = \cdots = c_n = 0$.

(2) $e_1 = \sum_{i=1}^{n-1} c_i\alpha_i$, $c_i \in \mathbb{K}$ とおく．$0 = \sum_{i=1}^{n-1} c_i\alpha_i - [e_1] = [(c_1-1)e_1 + \sum_{i=2}^{n-1}(c_i - c_{i-1})e_i - c_{n-1}e_n]$ なので, ある $c \in \mathbb{K}$ が存在して, V において

$$(c_1-1)e_1 + \sum_{i=2}^{n-1}(c_i - c_{i-1})e_i - c_{n-1}e_n = c(e_1 + \cdots + e_n).$$

これから連立方程式 $c_1 - 1 = c$, $c_2 - c_1 = c$, $c_3 - c_2 = c$, …, $c_{n-1} - c_{n-2} = c$, $-c_{n-1} = c$ が得られて, 解くと $c_i = ic + 1$ $(i = 1, \ldots, n-2)$, $c_{n-1} = (n-1)c + 1 = -c$ となる．$\mathbb{K}$ の標数は 0 だから, $c = -\frac{1}{n}$, $c_i = 1 - \frac{i}{n}$ $(i = 1, \ldots, n-1)$. 以上より

$$[e_1] = \sum_{i=1}^{n-1}\Big(1 - \frac{i}{n}\Big)\alpha_i.$$

コメント． 各小問を 15 点として, 計 30 点満点で採点しました．平均点は 5.6 点でした．

(1) は $\dim(V/W) = n-1$ に言及していれば 5 点, また $\sum_{i=1}^{n-1} c_i(e_i - e_{i+1}) \in W$ に言及していれば 5 点つけています．

(1) または (2) で標数 0 であることを議論に用いていない場合は 5 点減点しました．

(1) で $0 = [\sum_{i=1}^{n-1} c_i(e_i - e_{i+1})]$ までは正しく処理できているけれど, この等式が V ではなく V/W におけるものであることを認識できていなくて, そのため, “$\sum_{i=1}^{n-1} c_i(e_i - e_{i+1}) = 0$” としてしまう答案が目立ちました．解答にあるように, 正しくは $\sum_{i=1}^{n-1} c_i(e_i - e_{i+1}) \in W$ です．

5/30 の小テストと本質的に同じ問題ですが, 過半数の人が商空間を理解していない様子で, あまり得点できていませんでした．商空間が理解できていないと, これから先, 専門科目の任意の講義についていけなくなります．よく復習しておいて下さい．

問題 3. V を 2 次以下の実係数多項式全体のなすベクトル空間とする:

$$V \coloneqq \{p = p(x) = ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

V は $\{x^2, x, 1\}$ を基底とする, 3 次元の実線形空間である．各 $p(x) = ax^2 + bx + c \in V$ に対し, 線形写像 $p(D)\colon V \to V$ が次式で定まる．

$$p(D)q \coloneqq aq'' + bq' + cq \quad (q \in V).$$

但し $q' \coloneqq \frac{d}{dx}q$, $q'' \coloneqq \frac{d^2}{dx^2}q$ はそれぞれ多項式 $q = q(x)$ の x に関する一階微分および二階微分である．

(1) $p(x) = ax^2 + bx + c \in V$ に対し, 順序付き基底 $(x^2, x, 1)$ に関する線形写像 $p(D)\colon V \to V$ の表現行列を求めよ．

(2) 二つの多項式 $p, q \in V$ に対して

$$\langle p, q\rangle \coloneqq (p(D)q)(0) \in \mathbb{R}$$

と定義する．ただし右辺は多項式 $p(D)q$ の $x = 0$ での値である．
$p(x) = ax^2 + bx + c$, $q(x) = kx^2 + lx + m$ $(a, b, c, k, l, m \in \mathbb{R})$ として, $\langle p, q\rangle$ の値を求めよ．

(3) (2) の $\langle p, q\rangle$ から定まる写像 $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon V \times V \to \mathbb{R}$ が対称双線形型式であることを示せ．

(4) 線形関数 $\ell_0\colon V \to \mathbb{R}$ が次式で定まる．

$$\ell_0(p) \coloneqq \int_0^1 p(x)\,dx \quad (p \in V).$$

任意の $p \in V$ に対して $\ell_0(p) = \langle p, I\rangle$ となるような多項式 $I \in V$ を具体的に求めよ．

(5) 二つの線形関数 $\ell_1, \ell_2 \colon V \to \mathbb{R}$ を次のように定める.

$$\ell_1(p) \coloneqq \int_0^1 p'(x)\,dx, \quad \ell_2(p) \coloneqq \int_0^1 p''(x)\,dx \quad (p \in V).$$

三つの線形関数 ℓ_0, ℓ_1, ℓ_2 が双対空間 $V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{R})$ において一次独立であることを証明せよ.

解答. (1) 直接計算で $p(D)x^2 = cx^2 + 2bx + 2a$, $p(D)x = cx + b$, $p(D)1 = c$ となるので,

$$\begin{pmatrix} p(D)x^2 & p(D)x & p(D)1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx^2 + 2bx + 2a & cx + b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 2b & c & 0 \\ 2a & b & c \end{pmatrix}.$$

上式右辺の正方行列が $p(D) \in \mathrm{End}(V)$ の表現行列である.

(2) 直接計算で $p(D)q = kp(D)x^2 + lp(D)x + mp(D)1 = 2ak + bl + cm + (x$ を含む項$)$ となるから,

$$\langle p, q \rangle = (p(D)q)(0) = 2ak + bl + cm.$$

(3) $p(D) \colon V \to V$ が線形写像なので, 任意の $q, r \in V$ と $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ に対し

$$\langle p, \lambda q + \mu r \rangle = \big(p(D)(\lambda q + \mu r)\big)(0) = \big(\lambda(p(D)q) + \mu(p(D)r)\big)(0) = \lambda\langle p, q \rangle + \mu\langle p, r \rangle.$$

よって $\langle p, \cdot \rangle \colon V \to \mathbb{R}$ は線形. また (2) の結果より $\langle p, q \rangle = \langle q, p \rangle$ なので対称. すると $\langle \cdot, q \rangle \colon V \to \mathbb{R}$ も線形である. 以上より $\langle p, q \rangle$ は V 上の対称双線形型式.

(4) $p = ax^2 + bx + c \in V$ に対して $\ell_0(p) = \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b + c$ となる. 従って

$$I \coloneqq \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2}x + 1 \in V$$

とおくと (2) の結果より任意の $p \in V$ に対して $\ell_0(p) = \langle p, I \rangle$ が成り立つ.

(5) $a, b, c \in \mathbb{R}$ が V^* における等式 $a\ell_0 + b\ell_1 + c\ell_2 = 0$ を満たしていると仮定して, $a = b = c = 0$ を示せば良い. 仮定から, 任意の $q \in V$ に対して $a\ell_0(q) + b\ell_1(q) + c\ell_2(q) = 0$.

まず $q = 1$ とすると, $\ell_0(1) = 1 \neq 0$, $\ell_1(1) = \ell_2(1) = 0$ より $a = 0$. よって $b\ell_1 + c\ell_2 = 0$ となり, 任意の $q \in V$ に対して $b\ell_1(q) + c\ell_2(q) = 0$.

次に $q = x$ とすると, $\ell_1(x) = 1 \neq 0$, $\ell_2(x) = 0$ となるので $b = 0$. よって $c\ell_2 = 0$ となり, 任意の $q \in V$ に対して $c\ell_2(q) = 0$.

最後に $q = x^2$ とすると $\ell_2(x) \neq 0$ となるので $c = 0$ が従う.

コメント. 各小問を 10 点として, 計 50 点満点で採点しました. 平均点は 39.6 点でした.

(1) 表現行列の定義を理解していない答案が 1 割程度ありました.

(5) では議論が雑な答案が目立ちました.

数学演習で類似の問題を扱っているはずです. そのためか, 全般的に良くできていました.

期末試験全体のコメント

計 $30 + 30 + 50 = 110$ 点で採点しました. 平均点は $18.2 + 5.6 + 39.6 = 63.4$ 点でした. 答案 1 枚目の名前欄の横に f と書いてあれば f 点が点数です. (f が丸で囲ってある場合もあります. 次の「成績の付け方」も参考にして下さい.) 得点分布は次の通りです.

得点	–44	45–64	65–84	85–104	105–
人数	12	15	16	6	5

成績の付け方

中間試験の得点を m, 期末試験の得点を f として,

$$t := \max(m, f)$$

を返却答案の名前の横に丸で囲って書きました. $t = f$ の場合は f を丸で囲ってあります. t の値によって以下の表のように成績を付けます.

t	–44	45–59	60–84	85–104	105–
成績	C−	C	B	A	A+
人数	11	14	18	6	5

今回の試験の採点や成績に関する事, その他質問・相談を受け付けますので, 気兼ねなくメールして下さい.

以上です.