現代数学基礎 BI　7 月 18 日分小テスト解答

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
連絡先: yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2023B1.html

問題. $\mathbb{K}$ を体とし, m と n を正整数とする. $\mathbb{K}^m$ を m 次元数ベクトル空間とし, $(\mathbb{K}^n)^*$ を n 次元数ベクトル空間の双対空間とする. 写像 $\varphi\colon \mathbb{K}^m \times (\mathbb{K}^n)^* \to \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ を次のように定める.

$$\varphi(w,f)(v) \coloneqq f(v)w \quad (w \in \mathbb{K}^m,\ v \in \mathbb{K}^n,\ f \in (\mathbb{K}^n)^*).$$

(1) φ が $\mathbb{K}$ 上の双線形写像であることを示せ.

双線形写像 φ から定まる $\mathbb{K}$ 上の線形写像を $\Phi\colon \mathbb{K}^m \otimes (\mathbb{K}^n)^* \to \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ と表す. 特に $w \in \mathbb{K}^m$ と $f \in (\mathbb{K}^n)^*$ に対して $\Phi(w \otimes f) = \varphi(w,f)$ が成立する.

$\mathbb{K}^m$ の標準基底を $e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e'_m = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbb{K}^n$ の標準基底を $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表し, $e_1, \dots, e_n$ の双対基底を $f_1, \dots, f_n \in (\mathbb{K}^n)^*$ と表す. そして $e_{ij} \in \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ を次で定める.

$$e_{ij} \coloneqq \Phi(e'_i \otimes f_j) \quad (i \in \{1,\dots,m\},\ j \in \{1,\dots,n\}).$$

(2) 各 $i \in \{1,\dots,n\}$ と $j,k \in \{1,\dots,n\}$ に対して $e_{ij}(e_k) \in \mathbb{K}^m$ を求めよ.

(3) $\{e_{ij} \mid i \in \{1,\dots,m\}, j \in \{1,\dots,n\}\}$ が $\mathrm{Hom}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n)$ の基底であることを示せ.

講義ノートの命題 10.1.9 より $\{e'_i \otimes f_j \mid i \in \{1,\dots,m\}, j \in \{1,\dots,n\}\}$ は $\mathbb{K}^m \otimes (\mathbb{K}^n)^*$ の基底だから, (3) より線形写像 Φ は基底を基底に写す. よって Φ は同型写像である.

解答. (1) 第一変数に関する線形性については, 任意の $w, w' \in \mathbb{K}^m$ と $c, c' \in \mathbb{K}$ および $f \in (\mathbb{K}^n)^*$ に対して $\varphi(cw + c'w', f) = c\varphi(w,f) + c'\varphi(w',f)$ を示せば良いが, 任意の $v \in \mathbb{K}^n$ に対して

$$\begin{aligned}\varphi(cw+c'w',f)(v) &= f(v)(cw+c'w') = c\big(f(v)w\big) + c'\big(f(v)w'\big) \\ &= c\varphi(w,f)(v) + c'\varphi(w',f)(v) \overset{*}{=} \big(c\varphi(w,f) + c'\varphi(w',f)\big)(v)\end{aligned}$$

となることから従う. 但し $*$ では $*$ では $(\mathbb{K}^n)^*$ の和とスカラー倍の定義を用いた.

第二変数についても同様に, 任意の $f, f' \in (\mathbb{K}^n)^*$ と $c, c' \in \mathbb{K}$ および $w \in \mathbb{K}^m$, $v \in \mathbb{K}^n$ に対して

$$\begin{aligned}\varphi(w, cf+c'f')(v) &= (cf+c'f')(v)w = \big(cf(v) + c'f'(v)\big)w = c\big(f(v)w\big) + c'\big(f'(v)w\big) \\ &= c\varphi(w,f)(v) + c'\varphi(w,f')(v) = (c\varphi(w,f) + c'\varphi(w,f'))(v).\end{aligned}$$

(2) $e_{ij}(e_k) = \phi(e'_i, f_j)(e_k) = f_j(e_k)e'_i = \delta_{j,k}e'_i$.

(3) 生成すること: 任意の $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ について, $\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^m e'_i\varphi_{ij}$, $\varphi_{ij} \in \mathbb{K}$ と表せば $\varphi = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \varphi_{ij}e_{ij}$. 実際, (2) から $(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \varphi_{ij}e_{ij})(e_k) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \varphi_{ij}\delta_{j,k}e'_i = \sum_{i=1}^m \varphi_{ik}e'_i = \varphi(e_k)$ となって, 基底の像が一致するから線形写像として一致する.

線形独立: $\psi \coloneqq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \varphi_{ij}e_{ij}$, $\varphi_{ij} \in \mathbb{K}$ が $\psi = 0$ だと仮定する. 任意の $k = 1,\dots,n$ に対して $0 = \psi(e_k) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \varphi_{ij}\delta_{j,k}e'_i = \sum_{i=1}^m \varphi_{ik}e'_i$ であり, e'_i 達が基底であることから $\varphi_{1k} = \cdots = \varphi_{mk} = 0$. 従って $\psi = \sum_{i,j} 0e_{ij} = 0$.

コメント. 各小問を 1 点として, 3 点満点で採点しました. 平均点は 2.1 点でした.

基本的な問題なので, 完答できるようにしましょう.

以上です.