現代数学基礎 BI　7 月 18 日分演習問題

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
連絡先: yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2023B1.html

断らない限り, 線形空間や線形写像は体 $\mathbb{K}$ 上のものとする.

問題 12.1. $\det(\cdots a_i \cdots a_i \cdots) = 0$ から $\det(\cdots a_j \cdots a_i \cdots) = -\det(\cdots a_i \cdots a_j \cdots) = 0$ を導け.

問題 12.2. 3 次正方行列の行列式の展開 $\det(a_{ij})_{i,j=1}^3 = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)}$ を確認せよ.

問題 12.3 (例 12.0.3)**.** $w_0 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n & n-1 & \cdots & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{S}_n$ について, $\operatorname{sgn}(w_0) = \begin{cases} 1 & (n \equiv 0, 1 \bmod 4) \\ -1 & (n \equiv 2, 3 \bmod 4) \end{cases}$ を示せ.

問題 12.4. $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$ について $\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = \operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{sgn}(\tau)$ であることを示せ.

問題 12.5 (定義 12.1.9)**.** $f\colon V \to W$ を線形写像とし, n を正整数とする. $V^{\times n} \to W$, $(v_1, \ldots, v_n) \mapsto f(v_1) \wedge \cdots \wedge f(v_n)$ が交代 n 重線形写像であることを示せ.

解答 12.1. 列ベクトル a, b に対して $f(a,b) \coloneqq \det(\cdots a \cdots b \cdots)$ とおくと, 行列式の多重線形性から $f(a+b, a+b) = f(a,a) + f(a,b) + f(b,a) + f(b,b)$. 仮定から $0 = f(a,a) = f(b,b) = f(a+b, a+b)$ なので $f(a,b) + f(b,a) = 0$.

解答 12.2. $\mathfrak{S}_3 = \{\mathrm{id} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)\}$ であり, 各々の置換行列 $P(\sigma)$ は $\left(\begin{smallmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & & \\ & & 1 \\ & 1 & \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} & 1 & \\ & & 1 \\ 1 & & \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} & & 1 \\ 1 & & \\ & 1 & \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{smallmatrix}\right)$. 符号 $\mathrm{sgn}(\sigma) = \det P(\sigma)$ は $1, -1, -1, 1, 1, -1$. よって $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} = a_{11} \left|\begin{smallmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{smallmatrix}\right| - a_{12} \left|\begin{smallmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{smallmatrix}\right| + a_{13} \left|\begin{smallmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{smallmatrix}\right| = \det A$.

解答 12.3. $P(w_0) = \left(\begin{smallmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{smallmatrix}\right)$ なので $\mathrm{sgn}(w_0) = \det P(\sigma) = (-1)^{n(n-1)/2}$. $n = 4q + r$, $q, r \in \mathbb{Z}$ と表せば $n(n-1)/2 \equiv r(r-1)/2 \bmod 2$. $r = 0, 1, 2, 3$ の場合を調べると結論を得る.

解答 12.4. $(\delta_{i,\sigma(j)})_{i,j=1}^n (\delta_{i,\tau(j)})_{i,j=1}^n = (\delta_{i,(\sigma\tau)(j)})_{i,j=1}^n$, つまり各 i, j に対して $\sum_{k=1}^n \delta_{i,\sigma(k)} \delta_{k,\tau(j)} = \delta_{i,(\sigma\tau)(j)}$ を示せば良いが, $\sum_{k=1}^n \delta_{i,\sigma(k)} \delta_{k,\tau(j)} = \delta_{i,\sigma(\tau(j))} = \delta_{i,(\sigma\tau)(j)}$.

解答 12.5. $\wedge \colon V^{\times n} \to V^{\otimes n}$ が交代 n 重線形写像であることと, f の線形性から従う.