§12. 外積

体$\mathbb{K}$上　　7・18・1

§10.3 多重テンソル積

Prp. 10.3.1　V_1, V_2, V_3：線形空間　$V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) \simeq (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$,
$v_1 \otimes (v_2 \otimes v_3) \mapsto (v_1 \otimes v_2) \otimes v_3$　□

Fact. 10.3.3　$V_1, \dots, V_n$：線形空間．テンソル積空間は全て同型
$$V_1 \otimes (V_2 \otimes \cdots \otimes (V_{n-2} \otimes (V_{n-1} \otimes V_n)) \cdots)$$
$$= V_1 \otimes (V_2 \otimes \cdots \otimes ((V_{n-2} \otimes V_{n-1}) \otimes V_n) \cdots)$$
$$= \cdots$$
$$= (\cdots (V_1 \otimes V_2) \otimes \cdots \otimes V_{n-1}) \otimes V_n$$ □

Dfn. 10.3.4.　$V_1 \otimes \cdots \otimes V_n := V_1 \otimes (V_2 \otimes \cdots \otimes (V_{n-1} \otimes V_n) \cdots) \ni v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$
$V^{\otimes n} := V \otimes \cdots \otimes V$ (n コ)　：n重テンソル積(空間)　□

Lem. 10.3.5　$\{v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \mid v_i \in V_i \ (i=1,\dots,n)\}$ は $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ を生成する　□

Prp. 10.3.6　$V_1, \dots, V_n$：有限次元．$\{v^i_1, \dots, v^i_{d_i}\}$：$V_i$の基底
$\Rightarrow \{v^1_{j_1} \otimes \cdots \otimes v^n_{j_n} \mid j_i \in \{1, \dots, d_i\}, (i=1,\dots,n)\}$ は $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ の基底
特に　$\dim(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n) = (\dim V_1) \cdots (\dim V_n)$　□

Dfn. 10.3.7　$V_1, \dots, V_n, W$：線形空間．写像 $\varphi: V_1 \times \cdots \times V_n \to W$ が n重線形
$:\Leftrightarrow$ 各 $i=1,\dots,n$ に対し，φ は第i変数について線形．　□

Thm. 10.3.8　$V_1, \dots, V_n, W$：線形空間
(1)　$V_1 \times \cdots \times V_n \to V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$, $(v_1, \dots, v_n) \mapsto v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$ はn重線形
(2) 次は全単射，互いの逆写像．
$$\mathrm{Hom}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n, W) \rightleftarrows \{V_1 \times \cdots \times V_n \to W \mid n\text{重線形}\}$$
$$f \longmapsto ((v_1, \dots, v_n) \mapsto f(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n))$$
$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \mapsto \varphi(v_1, \dots, v_n)) \longleftarrow\!\!\shortmid \ \varphi$$ □

§12.0 行列式

Dfn. 12.0.1. $A=(a_{ij})_{i,j=1}^{n}\in M(n;\mathbb{K})$ の行列式 $\det A$ を、n(サイズ)に関する帰納法で定める。

$n=1$: $\det(a_{11}):=a_{11}$

$n-1$まで定めたとして、$\det A := \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}a_{1i}\det A_{1i}$

Aから第一行と第i列を除いた行列 $\square$

Fact. 12.0.4.
(1) 行列式は列に関して多重線形。

$$\det(a_1\cdots ca_i+c'b_i\cdots a_n) = c\det(a_1\cdots a_i\cdots a_n)+c'\det(a_1\cdots b_i\cdots a_n)$$

(2) 行列式は行に関して多重線形。

(3) 〃 列 〃 交代的: $\det(\cdots a_i\cdots a_j=a_i\cdots)=0$ $(i\neq j)$

(4) 〃 行 〃 〃. $\square$

Cor. $\det(\cdots,a_j,\dots,a_i,\dots) = -\det(\cdots,a_i,\dots,a_j,\dots)$ 問12.1. $\square$

Fact. 12.0.3.

$$\det A = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}a_{i1}\det A_{i1}$$

A_{i1}: Aから第i行と第1列を除いた行列

$$= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\,a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\,a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n} \quad\square$$

Sのfraktur. symmetric group

$[n]:=\{1,\dots,n\}$. $\mathfrak{S}_n := \mathrm{Aut}([n]) = \{\sigma:[n]\to[n] \mid 全単射\}$

$\mathfrak{S}_n\ni\sigma=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\ \sigma(1)&\sigma(2)&\cdots&\sigma(n)\end{pmatrix}$: 置換

σの符号

$P(\sigma):=(\delta_{i,\sigma(j)})_{i,j=1}^{n}$: 置換行列　$\operatorname{sgn}(\sigma):=\det P(\sigma)\in\{\pm1\}$

Exm. 問12.2

$$\mathfrak{S}_3=\left\{id=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}, w_0=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\right\}$$

$$P:\ \begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}1&&\\&0&1\\&1&0\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0&1&\\1&0&\\&&1\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}&&1\\&1&\\1&&\end{pmatrix}$$

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_3}\operatorname{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)} = a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31} \quad\square$$

Exm. 12.0.3 $w_0=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\n&n-1&\cdots&1\end{pmatrix}\in\mathfrak{S}_n$ ←問12.3

$\operatorname{sgn}(\sigma)=(-1)^{\binom{n}{2}}=\begin{cases}1 & n\equiv0,1 \bmod 4\\ -1 & n\equiv 2,3 \ 〃\end{cases}$ $\square$

Exm. $\sigma,\tau\in\mathfrak{S}_n$. $\sigma\tau=\sigma\circ\tau$. $\operatorname{sgn}(\sigma\tau)=\operatorname{sgn}(\sigma)\cdot\operatorname{sgn}(\tau)$: 問12.4 $\square$

§12.1. 外積と交代線形写像

Dfn. 12.1.1 V:線形空間 $n\in\mathbb{N}$.

$V^{\otimes n}\supset R_n := \langle v_1\otimes\cdots\otimes v_n \mid v_1,\dots,v_n\in V,\ \exists i\neq j.\ v_i=v_j\rangle$ $(n\geq 2)$

$V^{\otimes 1}:=V\supset R_1:=\{0_V\}$, $V^{\otimes 0}:=\mathbb{K}\supset R_0:=\{0_{\mathbb{K}}\}$

$\Lambda^n V := V^{\otimes n}/R_n$: n次外積(空間)

$\overline{\cdot}: V^{\otimes n}\to\Lambda^n V$: 標準全射, $v_1\otimes\cdots\otimes v_n\mapsto\overline{v_1\otimes\cdots\otimes v_n}=:v_1\wedge\cdots\wedge v_n$ □

Eg. 12.1.2 $n=2$. $u,v,w\in V$, $c,d\in\mathbb{K}$

$$\begin{cases}(cu+dv)\wedge w = c(u\wedge w)+d(v\wedge w)\\ u\wedge(cv+dw) = c(u\wedge v)+d(u\wedge w)\\ v\wedge v = 0\\ v\wedge w = -w\wedge v\end{cases}$$

Pf. $(cu+dv)\wedge w=\overline{(cu+dv)\otimes w}=\overline{c(u\otimes w)+d(v\otimes w)}=c\overline{u\otimes w}+d\overline{v\otimes w}=c(u\wedge w)+d(v\wedge w)$

第二式も同様. $v\wedge v=\overline{v\otimes v}=0$ $(\because v\otimes v\in R_2)$

$(v+w)\wedge(v+w)=0$ と第一,二式より

$v\wedge v+v\wedge w+w\wedge v+w\wedge w=0$ 第三式より $v\wedge w+w\wedge v=0$ □

Lem. 12.1.3 $\Lambda^0 V=\mathbb{K}/\{0\}\cong\mathbb{K}$, $\Lambda^1 V=V/\{0\}\cong V$,

$n\geq 2$に対し $\Lambda^n\mathbb{K}=\{0\}$.

Pf. (後半) $\mathbb{K}^{\otimes n}=\mathbb{K}(1\otimes\cdots\otimes 1)$, $c_1\otimes\cdots\otimes c_n=(c_1\cdot 1)\otimes\cdots\otimes(c_n\cdot 1)=(c_1\cdots c_n)1\otimes\cdots\otimes 1$

と $\mathbb{K}^{\otimes n}\supset R_n\ni 1\wedge\cdots\wedge 1$ より $R_n=\mathbb{K}^{\otimes n}$. $\therefore\ \Lambda^n\mathbb{K}=\mathbb{K}^{\otimes n}/R_n=\{0\}$ □

Lem. 12.1.4 $\{v_1\wedge\cdots\wedge v_n\mid v_1,\dots,v_n\in V\}$ は$\Lambda^n V$を生成する.

Pf. $\{v_1\otimes\cdots\otimes v_n\mid v_i\in V\}$ は $V^{\otimes n}$ を生成するから,

$\{\overline{\quad〃\quad}\mid\ 〃\ \}$ は $V^{\otimes n}/R_n$ 〃 □

Dfn. 12.1.5. V, W: 線形空間. $V^{\times n} := \overbrace{V \times \cdots \times V}^{n コ}$ (直積集合).

$\varphi: V^{\times n} \to W$ が交代n重線形 :$\Leftrightarrow$ n重線形かつ $\varphi(\cdots, v, \cdots, v, \cdots) = 0$ $\forall v \in V$ $\square$

Exm. 12.1.6 $(\mathbb{K}^d)^{\times n} \xrightarrow{\sim} M(d, n; \mathbb{K})$, $(a_1, \ldots, a_n) \mapsto A = (a_1 \cdots a_n) = (a_{ij})_{i,j}$

$d \geq n$, $a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{dj} \end{pmatrix}$

$I = \{i_1, \ldots, i_n\} \subset \{1, \ldots, d\}$ $A_I := \begin{pmatrix} a_{i_1 1} & \cdots & a_{i_1 n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_n 1} & \cdots & a_{i_n n} \end{pmatrix} \in M(n; \mathbb{K})$

$\det_I : (\mathbb{K}^d)^{\times n} = M(d, n; \mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$,

$A \longmapsto \det A_I$ (AのI小行列式)

$\det_I$は交代n重線形 ($\because$ 行列式の交代線形性, Fact 12.0.4) $\square$

Lem. 12.1.11. $\varphi: V^{\times n} \to W$: 交代$n$重線形. $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$ $\varphi(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(n)}) = \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \varphi(v_1, \ldots, v_n)$

Pf. $r(\sigma) := \#\{k \in \{1, \ldots, n\} \mid \sigma(k) \neq k\}$ に関する帰納法.

$r(\sigma) = 0$ なら $\sigma = \mathrm{id}$. で両辺とも $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$. $r(\sigma) = 1$ の場合はなし.

$r(\sigma) = 2$ なら $\sigma = (\cdots i \cdots j \cdots)$. Eg. 12.12と同様に $\varphi(\cdots v_j \cdots v_i \cdots) = -\varphi(\cdots v_i \cdots v_j \cdots)$

$r(\sigma) \geq 3$ なら $i := \min\{k \mid \sigma(k) \neq k\}$, $j := \sigma(i)$ として $\tau := (\cdots i \cdots j \cdots)$, $\upsilon := \tau\sigma$

$r(\upsilon) < r(\sigma)$ と $\sigma = \tau\upsilon$ から $\varphi(v_{\sigma(1)}, \cdots) = \mathrm{sgn}(\tau)\varphi(v_{\upsilon(1)}, \cdots) = \mathrm{sgn}(\tau)\mathrm{sgn}(\upsilon)\varphi(v_1, \cdots) = \mathrm{sgn}(\sigma)\varphi(v_1, \cdots)$ $\square$

Thm. 12.1.7. (外積の普遍性) V, W: 線形空間 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$

(1) $\wedge: V^{\times n} \to \wedge^n V$, $(v_1, \ldots, v_n) \mapsto v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$ は交代n重線形

(2) 次は全単射, 互いに逆.

$$\mathrm{Hom}(\wedge^n V, W) \rightleftarrows \{V^{\times n} \to W \mid 交代n重線形\}$$

$$f \longmapsto ((v_1, \ldots, v_n) \mapsto f(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n))$$

$$(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n \mapsto \varphi(v_1, \ldots, v_n)) \longleftarrow \varphi$$

$\square$

Dfn. 12.1.9 $f: V \to W$: 線形, n: 正整数

$V^{\times n} \longrightarrow \wedge^n W$, $(v_1, \ldots, v_n) \mapsto f(v_1) \wedge \cdots \wedge f(v_n)$

は交代n重線形: 問12.5 これから Thm. 12.1.7. (2) で定まる線形写像を

$\wedge^n f: \wedge^n V \to \wedge^n W$, $v_1 \wedge \cdots \wedge v_n \mapsto f(v_1) \wedge \cdots \wedge f(v_n)$ と書く.

§12.2 外積空間の基底.

Thm. 12.2.1. V: 有限次元, $\{v_1, \dots, v_d\}$: Vの基底.
$\Rightarrow \{v_{i_1} \wedge \cdots v_{i_n} \mid 1 \le i_1 < \cdots < i_n \le d\}$ は $\Lambda^n V$ の基底.
特に $\dim \Lambda^n V = \binom{\dim V}{n}$,
$\Lambda^{\dim V} V = \mathbb{K} v_1 \wedge \cdots \wedge v_d \cong \mathbb{K}$, $\Lambda^n V = \{0\}$ $n > \dim V$ $\square$

Exm. 12.2.2.
- $\mathbb{K}^2 = \mathbb{K}e_1 + \mathbb{K}e_2$, $e_1 = \binom{1}{0}, e_2 = \binom{0}{1}$
  $\Lambda^0 \mathbb{K}^2 = \mathbb{K}$, $\Lambda^1 \mathbb{K}^2 = \mathbb{K}^2 = \mathbb{K}e_1 + \mathbb{K}e_2$, $\Lambda^2 \mathbb{K}^2 = \mathbb{K}e_1 \wedge e_2$
- $\mathbb{K}^3 = \mathbb{K}e_1 + \mathbb{K}e_2 + \mathbb{K}e_3$
  $\Lambda^0 \mathbb{K}^3 = \mathbb{K}$, $\Lambda^1 \mathbb{K}^3 = \mathbb{K}e_1 + \mathbb{K}e_2 + \mathbb{K}e_3$,
  $\Lambda^2 \mathbb{K}^3 = \mathbb{K}e_1 \wedge e_2 + \mathbb{K}e_1 \wedge e_3 + \mathbb{K}e_2 \wedge e_3$, $\Lambda^3 \mathbb{K}^3 = \mathbb{K}e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$ $\square$

Prp. 12.2.5 V: 有限次元. $B = (v_1, \dots, v_d)$: Vの基底. $f \in \mathrm{End}(V)$
$\det f := \Lambda^{\dim V} f : \Lambda^{\dim} V \longrightarrow \Lambda^{\dim V} V$,

Dfn. 12.1.9.

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^{\dim}V & \longrightarrow & \Lambda^{\dim V}V \\ \| & & \| \\ \mathbb{K}v_1 \wedge \cdots \wedge v_d & & \mathbb{K}v_1 \wedge \cdots \wedge v_d \end{array}$$

$c \in \mathbb{K}$: $(\det f)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_d) = c \cdot v_1 \wedge \cdots \wedge v_d$
$\Rightarrow c = \det A$. A: fのBに関する行列表示

Prf. $A = (a_{ij})_{i,j=1}^d$, $f(v_j) = \sum_{i=1}^d v_i a_{ij}$.

$$\begin{aligned}
(\det f)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_d) &= f(v_1) \wedge \cdots \wedge f(v_d) \\
&= \left(\sum_{i_1=1}^d v_{i_1} a_{i_1 1}\right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{i_d=1}^d v_{i_d} a_{i_d d}\right) \\
&= \sum_{i_1, \dots, i_d = 1}^d a_{i_1 1} \cdots a_{i_d d} \cdot v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_d} \\
&= \sum_{1 \le i_1, \dots, i_d \le d,\ \text{相異}} \quad \text{''} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(d)d}\, v_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge v_{\sigma(d)}
\end{aligned}$$

Lem. 12.1.11 と $\wedge : V^{\times d} \to \Lambda^d V$ に.

$$\begin{aligned}
&= \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(d)d}\right) v_1 \wedge \cdots \wedge v_d \\
&= (\det A) \cdot v_1 \wedge \cdots \wedge v_d
\end{aligned}$$
$\square$