

現代数学基礎 BI 7月11日分小テスト解答

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)

連絡先: yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

<https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2023B1.html>

問題. n を正整数とし, 複素数成分の n 次正方行列全体のなす集合を M と書く. M は行列単位 E_{ij} ((i, j) 成分だけが 1 で残りの成分が 0 である正方行列) 達を基底とする n^2 次元の複素線形空間である. 正方行列のトレース tr を使って写像 b を

$$b: M \times M \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (X, Y) \longmapsto \text{tr}(XY).$$

と定めると, b は双線形形式である. また M の部分空間 N に対して, M の部分集合 N^\perp を次のように定める.

$$N^\perp := \{X \in M \mid \forall Y \in N, b(X, Y) = 0\}.$$

- (1) 任意の部分空間 $N \subset M$ に対し, 集合 N^\perp が M の部分空間であることを示せ.
- (2) 零行列を O と表す. $M^\perp = \{O\}$ となることを示せ.
- (3) 各 $X \in M$ に対して写像 $l_b(X): M \rightarrow \mathbb{C}$ を $l_b(X)(Y) := b(X, Y)$ で定義すると $l_b(X)$ は線形写像, つまり $l_b(X) \in M^* = \text{Hom}(M, \mathbb{C})$ である. 更に写像 $l_b: M \rightarrow M^*$ を $X \mapsto l_b(X)$ で定義すると l_b は線形写像, つまり $l_b \in \text{Hom}(M, M^*)$ である. l_b が同型写像であることを示せ.

解答. (1) 零行列 O は任意の $X \in N$ に対して $b(X, O) = \text{tr}(XO) = \text{tr}(O) = 0$ を満たすので $O \in N^\perp$. また任意の $Y, Y' \in N^\perp$ と $c, c' \in \mathbb{C}$ を取ると, 任意の $X \in N$ に対して $b(X, cY + c'Y') = cb(X, Y) + c'b(X, Y') = 0 + 0 = 0$ となるので, $cY + c'Y' \in N^\perp$. 以上より N^\perp は M の部分空間である.

- (2) 任意に $X \in M^\perp$ と取ると, 任意の $1 \leq k, l \leq n$ に対して $b(X, E_{kl}) = 0$. 一方, 行列単位のなす基底を用いて $X = \sum_{i,j=1}^n x_{ij} E_{ij}$, $x_{ij} \in \mathbb{C}$ と表すと,

$$b(X, E_{kl}) = \sum_{i,j=1}^n x_{ij} \text{tr}(E_{ij} E_{kl}) = \sum_{i,j=1}^n x_{ij} \text{tr}(\delta_{j,k} E_{il}) = \sum_{i,j=1}^n x_{ij} \delta_{j,k} \delta_{i,l} = x_{kl}.$$

従って $X \in M^\perp$ なら全ての成分は 0, つまり $X = O$ である.

- (3) 線形写像 $l_b: M \rightarrow M^*$ が全単射であることを示せば良い. 単射性は $\text{Ker } l_b = \{O\}$ から従うが,

$$\text{Ker } l_b = \{X \in M \mid l_b(X) = 0\} = \{X \in M \mid \forall Y \in M, b(X, Y) = 0\} = M^\perp$$

は (2) より零空間である. 次に全射性について. 線形写像 l_b に準同型定理を用い, l_b の単射性を使うと

$$\dim M = \dim \text{Ker } l_b + \dim \text{Im } l_b = \dim \text{Im } l_b.$$

一方 M は有限次元なので $\dim M^* = \dim M$. よって $\text{Im } l_b = M^*$, つまり l_b は全射である.

コメント. 各小問を 1 点として, 3 点満点で採点しました. 平均点は 2.0 点でした.

- (2) の議論が不正確な答案が目立ちました. 問題文冒頭の行列単位を手掛かりにしてください.
- (3) の別解として, $M^* \rightarrow M$, $f \mapsto (f(E_{ji}))_{i,j=1}^n$ が l_b の逆写像であることが示せます.

以上です.