現代数学基礎 BI　7 月 11 日分演習問題

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
連絡先: yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2023B1.html

断らない限り, 線形空間や線形写像は体 $\mathbb{K}$ 上のものとする.

問題 11.1 (例 11.1.2)**.** 対称行列 $S \in M(n;\mathbb{K})$ から定まる写像 $b_S\colon \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, $b_S(v,w) := {}^t v S w$ が 対称双線形型式であることを示せ.

問題 11.2 (例 11.1.3)**.** 実線形空間 $C^\infty(\mathbb{R}) := \{\mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid$ 任意回微分可能 $\}$ について, $w \in C^\infty(\mathbb{R})$ と閉区間 $I \subset \mathbb{R}$ を取り, 写像 $(\cdot,\cdot)_{w,I}\colon C^\infty(\mathbb{R}) \times C^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ を $(f,g)_{w,I} := \int_I f(x)g(x)w(x)dx$ で定義すると, これが対称双線形型式になることを示せ.

問題 11.3 (補題 11.1.4)**.** 有限次元線形空間 V の基底 $(v_1,\dots,v_n)$ と双線形型式 $b\colon V \times V \to \mathbb{K}$ が与えられている. この基底に関する b の行列表示を $B = \bigl(b(v_i,v_j)\bigr)_{i,j=1}^n \in M(n;\mathbb{K})$ とする. このとき, b が対称 $\iff$ B が対称行列, となることを示せ.

問題 11.4 (例 11.1.7)**.** 実線形空間 $\mathbb{R}[x]_{\ge 2} := \{ax^2+bx+c \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$ 上の対称双線形型式 $(f,g) := (f,g)_{1,[0,1]} = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ について, $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = \sqrt{3}(2x-1)$, $p_2(x) = \sqrt{5}(6x^2-6x+1)$ が正規直交基底であることを示せ.

問題 11.5 (命題 11.1.8 (2) 証明)**.** V を線形空間, $b\colon V \times V \to \mathbb{K}$ を双線形写像とし, 線形写像 $r_b\colon V \to V^*$ を $r_b(v) := b(\cdot,v)$ で定める. また $W \subset V$ を部分空間, $b_W := b|_{W\times W}\colon W \times W \to \mathbb{K}$ を b の制限写像とし, 線形写像 $r_{b_W}\colon W \to W^*$ を $r_{b_W}(w) := b_W(\cdot,w)$ で定める. そして $i\colon W \to V$ を包含写像とし, $i^*\colon V^* \to W^*$ をその双対写像とする. $r_{b_W} = i^* \circ r_b \circ i$ を示せ.

問題 11.6 (補題 11.2.3)**.** V を有限次元線形空間, $\{v_i \mid 1 \le i \le n\}$ を V の基底とする. $\{v_i v_j \mid 1 \le i < j \le n\}$ が S^2V の基底であることを示せ.

問題 11.7 (定理 11.2.3 (2) 証明)**.** $f \in \mathrm{Hom}(S^2V,U)$ に対し $s(f)\colon V \times V \to U$ を $s(f)(v,w) := f(vw)$ で定めると, $s(f)$ が対称双線形型式になることを示せ.

問題 11.8 (定理 11.2.3 (2) 証明)**.** $\{vw \mid (v,w) \in V \times V\}$ が S^2V を生成することを示せ.

解答 11.1. 第一変数に関する線形性は, 任意の $v, v' \in \mathbb{K}^n$ と $c, c' \in \mathbb{K}$ および $w \in \mathbb{K}^n$ に対して $b_S(cv + c'v', w) = {}^t(cv + c'v')Sw = c{}^tvSw + c'{}^tv'Sw = cb_S(v, w) + c'b_S(v', w)$. 対称性は $b_S(w, v) = {}^twSv = {}^tw{}^tSv = {}^t({}^tvSw) = b_S(v, w)$. 第二変数に関する線形性は第一変数に関する線形性と対称性から従う.

解答 11.2. 第一変数に関する線形性は, 任意の $f_1, f_2 \in C^\infty(\mathbb{R})$ と $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ および $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ に対して $(c_1f_1 + c_2f_2, g)_{w,I} = \int_I (c_1f_1(x) + c_2f_2(x))g(x)w(x)dx = c_1 \int_I f_1(x)g(x)w(x)dx + c_2 \int_I f_2(x)g(x)w(x)dx = c_1(f_1, g)_{w,I} + c_2(f_2, g)_{w,I}$. 対称性は $(f, g)_{w,I} = \int_I f(x)g(x)w(x)dx = \int_I g(x)f(x)w(x) = (g, f)_{w,I}$. 第二変数に関する線形性は第一変数に関する線形性と対称性から従う.

解答 11.3. b が対称なら $b(v_i, v_j) = b(v_j, v_i)$ だから $B = {}^tB$, つまり B は対称行列. B が対称行列なら, 任意の $x, y \in V$ を $x = \sum_{i=1} x_iv_i$, $y = \sum_{j=1}^n y_jv_j$, $v_i, w_j \in \mathbb{K}$ と展開して $b(x, y) = \sum_{i,j=1}^n x_iy_jb(v_i, v_j) = (x_1, \ldots, x_n)B{}^t(y_1, \ldots, y_n) = (x_1, \ldots, x_n){}^tB{}^t(y_1, \ldots, y_n) = {}^t\big((y_1, \ldots, y_n)B{}^t(x_1, \ldots, x_n)\big) = b(y, x)$ となるので, b は対称.

解答 11.4. $\deg_x p_i = i$ $i = 0, 1, 2$ より p_i 達は $\mathbb{R}[x]_{\geq 2}$ の基底である. 直接計算で $(p_i, p_j) = \int_0^1 p_i(x)p_j(x)dx = \delta_{i,j}$ が示せるので, これらは正規直交基底である.

解答 11.5. 任意の $w \in W$ に対し $(i^* \circ r_b \circ i)(w) = (i^* \circ r_b)(w) = i^*(b(\cdot, w)) = b(i(\cdot), w) = b_W(\cdot, w) = r_{b_W}(\cdot, w)$.

解答 11.6. $B \coloneqq \{v_i \otimes v_j \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ が $V^{\otimes 2}$ の基底であることを用いる. B は $V^{\otimes 2}$ を生成するから, $\{v_iv_j = \overline{v_i \otimes v_j} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ は $S^2V = V^{\otimes 2}/D$ を生成する. 例 11.2.2 より $v_iv_j = v_jv_i$ なので, $\{v_iv_j \mid 1 \leq i \leq j \leq n\}$ は S^2V を生成する. 次に S^2V において $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} c_{ij}v_iv_j = 0$, $c_{ij} \in \mathbb{K}$ だとすると, $v \coloneqq \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} c_{ij}v_i \otimes v_j \in V^{\otimes 2}$ は $v \in D$ を満たす. よって $v = \sum_{1 \leq i < j \leq n} d_{ij}(v_i \otimes v_j - v_j \otimes v_i)$, $d_{ij} \in \mathbb{K}$ と書ける. B は $V^{\otimes 2}$ において線形独立だから, 任意の i, j に対して $c_{ij} = 0$ が成り立つ.

解答 11.7. 第一変数に関する線形性は, 任意の $v, v' \in V$ と $c, c' \in \mathbb{K}$ および $w \in V$ に対して $s(f)(cv + c'v', w) = f\big((cv + c'v')w\big) = f\big(c(vw) + c'(v'w)\big) = cf(vw) + c'f(v'w) = cs(f)(v, w) + c's(f)(v', w)$ となるので成立. また $s(f)(v, w) = f(vw) = f(wv) = s(f)(w, v)$ なので対称. 第二変数に関する線形性は第一変数に関する線形性と対称性から従う.

解答 11.8. $\{v \otimes w \mid (v, w) \in V \times V\}$ は $V^{\otimes 2}$ を生成するので, $\{\overline{v \otimes w} = vw \mid (v, w) \in V \times V\}$ は $V^{\otimes 2}/D = S^2V$ を生成する.