# §11 対称双線形型式　　休XE.　　7・11・1

## §11.1.　　　〃

**Dfn. 11.1.1**　双線形写像 $b: V\times V\to U$ が対称 :⟺
$$\forall v, w\in V \quad b(v,w)=b(w,v)$$ □

**Exm. 11.1.2**　$S=(s_{ij})_{i,j=1}^{n}\in M(n;\mathbb{K})$, $S={}^tS$ (対称行列)
$b_S: \mathbb{K}^n\times\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}$,　$b_S(v,w):={}^tv\cdot S\cdot w$
は対称双線形型式.　問11.1　特に $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ で

(1) $I_n\in M(n;\mathbb{R})$: 単位行列. 対称.
$$b_{I_n}(v,w)={}^tv\cdot w=\sum_{i=1}^n v_iw_i \ :\ \mathbb{R}^n\text{の標準内積}$$

(2) $r,s,t\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$, $r+s+t=n$.
$$L(r,s,t):=\begin{pmatrix} I_r & & \\ & -I_s & \\ & & O\end{pmatrix}\in M(n;\mathbb{R}), \text{ 対称.}$$
$$b_{L(r,s,t)}(v,w)=\sum_{i=1}^r v_iw_i-\sum_{i=r+1}^{r+s}v_iw_i$$
$$b_{L(n,0,0)}=b_{I_n}$$

(3) $L(1,n-1,0)=\mathrm{diag}(1,-1,\cdots,-1)$
$$b_{L(1,n-1,0)}(v,w)=v_1w_1-\sum_{i=2}^n v_iw_i \ :\ \text{Lorenz型計量}$$
$n=4$,　$b_{L(1,3,0)}(v,w)$ : Lorenz計量 □

**Exm. 11.1.3**　$C^\infty(\mathbb{R}):=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid \text{任意回微分可能}\}$ : 実線形空間.
$w\in C^\infty(\mathbb{R})$,　$I\subset\mathbb{R}$: 閉区間
$(\cdot,\cdot)_{w,I}: C^\infty(\mathbb{R})\times C^\infty(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$,　$(f,g)_{w,I}:=\int_I f(x)g(x)w(x)dx$
は対称双線形型式　問11.2. □

**Lem. 11.1.4**　$V$: 有限次元線形空間　$(v_1,\dots,v_n)$: $V$の基底.
$b: V\times V\to\mathbb{K}$: 双線形　$B=(b(v_i,v_j))_{i,j=1}^n$: 基底に関するbの行列表示
$b$が対称 ⟺ $B$が対称.

**Pf.**　問11.3. □

**Dfn. 11.1.5** $b: V\times V \to \mathbb{K}$：対称双線形

Vの基底 $\{v_i \in V \mid i\in I\}$ がbの直交基底 $:\Leftrightarrow$ $b(v_i, v_j)=0$ $\forall i,j\in I,\ i\neq j$

〃 bの正規〃 $:\Leftrightarrow$ $b(v_i,v_j)=\delta_{ij}$ $\forall i,j\in I$ □

**Exm. 11.1.7** $\mathbb{R}[x]_{\le 2} = \{ax^2+bx+c \mid a,b,c\in\mathbb{R}\}$：2次以下の多項式のなす空間

11.1.3で $w(x)=1$, $I=[0,1]$ とした

$$(f,g) := \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$$

は $\mathbb{R}[x]_{\le 2}$ 上の対称双線形型式.

$$P_0(x)=1,\quad P_1(x)=\sqrt{3}(2x-1),\quad P_2(x)=\sqrt{5}(6x^2-6x+1)$$

は $(\cdot,\cdot)$ の正規直交基底. 問11.4. □

**Prp. 11.1.8** $b:V\times V\to\mathbb{K}$：対称双線形

$W\subset V$：部分空間 $W^\perp := \{v\in V \mid \forall w\in W,\ b(v,w)=0\}$

：Vの部分空間

$b_W := b|_{W\times W} : W\times W\to\mathbb{K}$：対称双線形

(1) $i: W\hookrightarrow V$：包含写像. $i^*: V^*\to W^*$：双対写像

$r_b: V\to V^*$, $r_b(v) := b(\cdot, v)$ ：§9.2

$\Rightarrow$ $W^\perp = \mathrm{Ker}(i^*\circ r_b)$

(2) Wが有限次元なら

(i) $b_W$：非退化 $\Leftrightarrow$ (ii) $V=W\oplus W^\perp$ $\Leftrightarrow$ (iii) $W\cap W^\perp=\{0\}$

**Prf.** (1) $\mathrm{Ker}(i^*\circ r_b) = \{v\in V \mid i^*(r_b(v))=0\} = \{v\in V\mid \forall w\in W,\ i^*(r_b(v))(w)=0\}$

$= \{v\in V\mid \forall w\in W,\ r_b(v)(i(w))=0\} = \{v\in V\mid \forall w\in W,\ r_b(v)(w)=0\}$

$=\{v\in V\mid$ 〃 $b(w,v)=0\} = W^\perp$

(2) (i) $:\Leftrightarrow$ $r_{b_W}$ と $l_{b_W}$ が単射 $\overset{b:\text{対称}}{\Longleftrightarrow}$ $r_{b_W}: W\to W^*$ 単射 $\overset{\dim W<\infty\text{より } W^*\cong W}{\Longleftrightarrow}$ $r_{b_W}$：同型

$l_{b_W}: W\to W^*$, $l_{b_W}(w) := b_W(w,\cdot)$

(i)⇒(ii): $r_{b_W} = i^* \circ r_b \circ i : W \to V \to V^* \to W^*$ : 問11.5

より、$g := i^* \circ r_b$ として、　$g$について準同型定理　　$g$:全射

(i) ⟺ $W \overset{i}{\hookrightarrow} V \xrightarrow{g} W^*$ : 同型 ⇒ $V \cong \mathrm{Ker}\, g \oplus \mathrm{Im}\, g \cong \mathrm{Ker}\, g \oplus W^*$

$\overset{(i),\ W \cong W^*}{\iff} V \cong W^\perp \oplus W$

(ii)⇒(iii): 直和の定義から.

(iii)⇒(i): (i)より $W \cap \mathrm{Ker}(g) = \{0\}$ なので $g \circ i$ は単射.　$W^* \supset$

$g \circ i = r_{b_W} : W \to W^*$ に準同型定理: $W \cong \mathrm{Ker}\, r_{b_W} \oplus \mathrm{Im}\, r_{b_W} = \mathrm{Im}\, r_{b_W}$

$W \cong W^*$ なので $r_{b_W}$ は全射. □

## §11.2. 対称テンソル積

$V$: 線形空間. $V^{\otimes 2} := V \otimes V$ : 2次テンソル積空間

$\forall U$: 線形空間　$b : \mathrm{Hom}(V^{\otimes 2}, U) \rightleftarrows \{V \times V \to U \mid 双線形\} : F$　全単射.

$f \mapsto b(f)(v, w) = f(v \otimes w)$

$F(\varphi)(v \otimes w) = \varphi(v, w) \leftarrow \varphi$

右側を $\{V \times V \to U \mid 対称双線形\}$ にしたい...

<u>Dfn.</u> 11.2.1,3　$D := \langle v \otimes w - w \otimes v \ (v, w \in V) \rangle \subset V^{\otimes 2}$ : 部分空間

$S^2 V := V^{\otimes 2} / D$ : 2次対称テンソル積空間

$V^{\otimes 2} \to S^2 V,\ v \otimes w \mapsto \overline{v \otimes w} =: vw$ □

<u>Exm.</u> 11.2.2.　$S^2 V$ で $\overline{v \otimes w} = \overline{w \otimes v + v \otimes w - w \otimes v}$

$= \overline{w \otimes v} + \overline{v \otimes w - w \otimes v} = \overline{v \otimes w}$

なので $vw = wv$ □

**Lem. 11.2.3.** $V$:有限次元. $\{v_i \in V \mid i=1,\dots,n\}$: $V$の基底 $\Rightarrow$ $\{v_iv_j \mid 1\le i\le j\le n\}$: $S^2V$の基底
特に$S^2V$は有限次元で $\dim S^2V = \binom{1+\dim V}{2}$ □

**Prf.** 問11.6 □

**Thm. 11.2.4.** ($S^2V$の普遍性) $V$:線形空間
(1) $\overline{\otimes}: V\times V \to S^2V$, $(v,w)\mapsto vw = \overline{v\otimes w}$ は対称双線形
(2) $\forall U$:線形空間. 次は全単射.
$$\Delta: \mathrm{Hom}(S^2V,U) \to \{V\times V\to U \mid 対称双線形\}$$
$$f \mapsto \Delta(f)(v,w) = f(vw)$$

**Prf.** (1) 第一変数の線形性: $(cv+c'v')w = \overline{(cv+c'v')\otimes w} = c\overline{v\otimes w}+c'\overline{v'\otimes w}$
第二 〃 も同様 $= c(vw)+c'(v'w)$
対称性は $vw=wv$ より.
(2) $\Delta(f): V\times V\to U$ が対称双線形であることは, (1)から示せる. 問11.7
$\Delta$の逆写像の構成: $F:\{V\times V\to U \mid 双線形\}\to \mathrm{Hom}(V^{\otimes 2},U)$ を使う.
$\varphi: V\times V\to U$ が対称双線形なら
$\forall (v,w)\in V\times V$, $F(\varphi)(v\otimes w) = \varphi(v,w)=\varphi(w,v) = F(\varphi)(w\otimes v)$
よって $F(\varphi)(D) = \{0\}$. 商空間の普遍性から、$F(\varphi)$は次を誘導する:
$$\hat F(\varphi): \underset{\substack{\| \\ S^2V}}{V^{\otimes 2}/D} \to U,\ 線形,\ \underset{\substack{\| \\ vw}}{\overline{v\otimes w}}\mapsto \underset{\substack{\| \\ \varphi(v,w)}}{F(\varphi)(v\otimes w)}$$
これから $\hat F: \underset{S:}{\{V\times V\to U\mid 対称双線形\}} \to \mathrm{Hom}(S^2V,U) =: H$
$\Delta\circ\hat F = \mathrm{id}_S$: $\forall\varphi\in S$, $(\Delta\circ\hat F)(\varphi)=\varphi$ を示す. $\forall(v,w)\in V\times V$,
$$(\Delta\circ\hat F)(\varphi)(v,w) = \hat F(\varphi)(vw) = F(\varphi)(v\otimes w) = \varphi(v,w)$$
$\hat F\circ\Delta = \mathrm{id}_H$: $\forall f\in H$. $(\hat F\circ\Delta)(f)=f$ を示す. $\forall(v,w)\in V\times V$
$$(\hat F\circ\Delta)(f)(vw) = F(\Delta(f))(v\otimes w) = \Delta(f)(v,w) = f(vw)$$
$\{vw\mid (v,w)\in V\times V\}$ は $S^2V$を生成するので $(\hat F\circ\Delta)(f)=f$. □
← 問11.8