現代数学基礎 BI　7 月 4 日分小テスト解答

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
連絡先: yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2023B1.html

問題. U を体 $\mathbb{K}$ 上の線形空間とし, $\langle \cdot, \cdot \rangle : U \times U \to \mathbb{K}$ をその上の双線形型式とする. U の部分空間 V に対して, 部分集合 $V^{\perp} \subset U$ を

$$V^{\perp} := \{ u \in U \mid \langle u, v \rangle = 0 \text{ が任意の } v \in V \text{ に対して成り立つ} \}$$

で定める. 以下の主張を示せ.

(1) $V^{\perp}$ は U の部分空間である.
(2) U の任意の部分空間 W について $(V+W)^{\perp} \subset V^{\perp} \cap W^{\perp}$.
(3) U の任意の部分空間 W について $(V+W)^{\perp} = V^{\perp} \cap W^{\perp}$.

解答. (1) $\langle 0, v \rangle = 0$ が任意の $v \in V$ に対して成り立つので $0 \in V^{\perp}$. また任意の $u, u' \in V^{\perp}$ と任意の $c, c' \in \mathbb{K}$ に対して, $\langle cu + c'u', v \rangle = c \langle u, v \rangle + c' \langle u', v \rangle = 0 + 0 = 0$ が任意の $v \in V$ について成立するので, $cu + c'u' \in V^{\perp}$. よって $V^{\perp} \subset U$ は部分空間.

(2) $u \in (V+W)^{\perp}$ なら任意の $x \in V+W$ に対して $\langle u, x \rangle = 0$. 特に任意の $v \in V \subset V+W$ と任意の $w \in W \subset V+W$ に対して $\langle u, v \rangle = \langle u, w \rangle = 0$ なので $u \in V^{\perp} \cap W^{\perp}$.

(3) $u \in V^{\perp} \cap W^{\perp}$ とする. 任意の $x \in V+W$ について, $x = v + w$ $(v \in V,\ w \in W)$ と表すと $\langle u, x \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle = 0 + 0 = 0$ なので, $u \in (V+W)^{\perp}$. これと (2) より $(V+W)^{\perp} = V^{\perp} \cap W^{\perp}$.

コメント. 各小問を 1 点として 3 点満点で採点しました. 平均点は 2.5 点でした.

(1) では, 前回同様, 零元の確認をしていない答案がありました.
(2) では, $(V+W)^{\perp}$ の元ではなく $V+W$ の元を取って議論を進めている, 不明瞭な答案がありました.

以上です.