現代数学基礎 BI　7 月 4 日分演習問題

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
連絡先: yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2023B1.html

線形空間や線形写像は体 $\mathbb{K}$ 上のものとする．

問題 10.1 (定理 10.1.1 (1))**.** V, W を線形空間とする．写像 $\otimes\colon V \times W \to V \otimes W$, $(v, w) \mapsto v \otimes w$ が第二変数について線形であることを示せ．

問題 10.2 (定理 10.1.1 (2))**.** テンソル積の定義のおける記号 $V \otimes W = S/R$ を用いる．双線形写像 $\varphi\colon V \times W \to U$ に対し, R の生成元 r のうちの三種類 $e_{v,w+w'} - e_{v,w} - e_{v,w'}$, $e_{cv,w} - ce_{v,w}$, $e_{v,cw} - ce_{v,w}$ ($v \in V$, $w, w' \in W$, $c \in \mathbb{K}$) について, $F(\varphi)(r) = 0$ となることを示せ．

問題 10.3 (補題 10.1.3 後半)**.** V, W を線形空間とする．任意の $v \in V$, $w, w' \in W$, $c, c' \in \mathbb{K}$ に対して $v \otimes (cw + c'w') = c(v \otimes w) + c'(v \otimes w')$ となることを示せ．

問題 10.4 (補題 10.1.6)**.** 写像 $V \to V \otimes \mathbb{K}w$, $v \mapsto v \otimes w$ が線形であることを示せ．また $\varphi\colon V \times \mathbb{K}w \to V$, $(v, cw) \mapsto cv$ が双線形であることを示せ．

問題 10.5 (問題 10.1.1)**.** e_1, e_2 を複素線形空間 $\mathbb{C}^2$ の標準基底とする．定理 10.1.9 より $e_{ij} := e_i \otimes e_j$ ($i, j \in \{1, 2\}$) は $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ の基底である．

(1) $\left(\begin{smallmatrix} i \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \otimes \left(\begin{smallmatrix} 3\pi \\ 4i \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ をこの基底の線形結合で表せ．

(2) $t = ae_{11} + be_{12} + ce_{21} + de_{22} \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ ($a, b, c, d \in \mathbb{C}$) について, 次の同値を示せ: $t = v \otimes w$ を満たす $v, w \in \mathbb{C}^2$ が存在する $\Leftrightarrow$ $ad = bc$.

問題 10.6 (補題 10.2.1)**.** $f\colon V \to V'$, $g\colon W \to W'$ を線形写像とする．写像 $b_{f,g}\colon V \times W \to V' \otimes W'$, $(v, w) \mapsto f(v) \otimes g(w)$ が双線形であることを示せ．

問題 10.7 (補題 10.2.3)**.** V, V', V'', W, W', W'' を線形空間とする．以下の主張を示せ．

(1) $\mathrm{id}_V \otimes \mathrm{id}_W = \mathrm{id}_{V \otimes W}$.

(2) 任意の $f \in \mathrm{Hom}(V, V')$, $g \in \mathrm{Hom}(W, W')$, $f' \in \mathrm{Hom}(V', V'')$ および $g' \in \mathrm{Hom}(W', W'')$ に対して $(f' \otimes g') \circ (f \otimes g) = (f' \circ f) \otimes (g' \circ g)$.

(3) $f \in \mathrm{Hom}(V, V')$ と $g \in \mathrm{Hom}(W, W')$ が同型写像なら $f \otimes g \in \mathrm{Hom}(V \otimes W, V' \otimes W')$ も同型写像．

問題 10.8 (問題 10.2.2)**.** V, W を有限次元線形空間とし, $f \in \mathrm{End}(V)$ および $g \in \mathrm{End}(W)$ とする．以下の主張を示せ．

(1) $\mathrm{tr}(f \otimes g) = \mathrm{tr}(f) \cdot \mathrm{tr}(g)$.

(2) $\det(f \otimes g) = (\det f)^{\dim W} \cdot (\det g)^{\dim V}$.

解答 10.1. 商空間として $V \otimes W := S/R$ と定義されることを用いる．任意の $v \in V$, $w, w' \in W$ および $c, c' \in \mathbb{K}$ に対して $v \otimes (cw + c'w') = \overline{e_{v,cw+c'w'}} = \overline{e_{v,cw} + e_{v,c'w'}} = \overline{e_{v,cw}} + \overline{e_{v,c'w'}} = \overline{ce_{v,w}} + \overline{c'e_{v,w'}} = c\overline{e_{v,w}} + c'\overline{e_{v,w'}} = cv \otimes w + c'v \otimes w'$. よって写像 $\otimes$ は第二変数について線形.

解答 10.2. 生成元 $r = e_{v,w+w'} - e_{v,w} - e_{v,w'}$ について:
$F(\varphi)(r) = F(\varphi)(e_{v,w+w'}) - F(\varphi)(e_{v,w}) - F(\varphi)(ev, w') = \varphi(v, w + w') - \varphi(v, w) - \varphi(v, w') = 0$.

生成元 $r = e_{cv,w} - ce_{v,w}$ について: $F(\varphi)(r) = F(\varphi)(e_{cv,w}) - cF(\varphi)(e_{v,w}) = \varphi(cv, w) - c\varphi(v, w) = 0$.

生成元 $r = e_{v,cw} - ce_{v,w}$ について: $F(\varphi)(r) = F(\varphi)(e_{v,cw}) - cF(\varphi)(e_{v,w}) = \varphi(v, cw) - c\varphi(v, w) = 0$.

解答 10.3. $S = \bigoplus_{(v,w)\in V\times W} \mathbb{K}e_{v,w}$ において $e_{v,cw+c'w'} - (ce_{v,w} + c'e_{v,w'}) = (e_{w,cv+c'w'} - e_{v,cw} - e_{v,c'w'}) + (e_{v,cw} - ce_{v,w}) + (e_{v',c'w} - c'e_{v',w}) \in R$ が成立するので, $v \otimes (cw + c'w') = \overline{e_{v,cw+c'w'}} = \overline{ce_{v,w} + c'e_{v,w'}} = c\overline{e_{v,w}} + c'\overline{e_{v,w'}} = c(v \otimes w) + c'(v \otimes w')$.

解答 10.4. 任意の $v, v' \in V$ と $c, c', d \in \mathbb{K}$ に対して $f(cv + c'v') = (cv + c'v') \otimes w = c(v \otimes w) + c'(v' \otimes w) = cf(v) + c'f(v')$. また $\varphi(cv + c'v', dw) = d(cv + c'v') = cdv + c'dv = c\varphi(v, dw) + c'\varphi(v', dw)$, $\varphi(v, cw) = cv = c\varphi(v, w)$ より φ は双線形.

解答 10.5. (1) $\left(\begin{smallmatrix} i \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \otimes \left(\begin{smallmatrix} 3\pi \\ 4i \end{smallmatrix}\right) = (ie_1 + 2e_2) \otimes (3\pi e_1 + 4ie_2) = 3\pi ie_1 \otimes e_1 - 4e_1 \otimes e_2 + 6\pi e_2 \otimes e_1 + 8ie_2 \otimes e_2$.

(2) $v = pe_1 + qe_2, w = re_1 + se_2 \in \mathbb{C}^2$ とすると $v \otimes w = pre_{11} + pse_{12} + qre_{21} + qse_{22}$. よって $t = v \otimes w$ なら $ad - bc = pr \cdot qs - ps \cdot qr = 0$.
逆に $ad = bc$ だと仮定する．$a \neq 0$ なら $d = bc/a$ なので $t = ae_{12} + be_{22} + be_{12} + \frac{bc}{a}e_{22} = \frac{1}{a}(ae_1 + ce_2) \otimes (ae_1 + be_2)$. $a = 0$ なら $b = 0$ または $c = 0$. $a = b = 0$ なら $t = ce_{21} + de_{22} = e_2 \otimes (ce_1 + de_2)$. $a = c = 0$ なら $t = be_{12} + de_{22} = (be_1 + de_2) \otimes e_2$.

解答 10.6. 第一変数に関する線形性を示す． 任意の $v, v' \in V$ と $c, c' \in \mathbb{K}$ および $w \in W$ に対して $b_{f,g}(cv + c'v', w) = f(cv + c'v') \otimes g(w) = (cf(v) + c'f(v')) \otimes g(w) = c(f(v) \otimes g(w)) + c'(f(v'') \otimes g(w)) = cb_{f,g}(v, w) + c'b_{f,g}(v', w)$. 第二変数に関する線形性も同様に示せる.

解答 10.7. 補題 10.1.5 を用いる.

(1) 補題 10.2.1 の記号を用いると, 双線形写像 $b_{\mathrm{id}_V,\mathrm{id}_W} : V \times W \to V \otimes W$ は任意の $(v, w) \in V \times W$ に対して $b_{\mathrm{id}_V,\mathrm{id}_W}(v, w) = v \otimes s$ を満たすので, $b_{\mathrm{id}_V,\mathrm{id}_W}$ が定める線形写像 $\mathrm{id}_V \otimes \mathrm{id}_W$ は対応 $v \otimes w \mapsto v \otimes w$ を与える．一方 $\mathrm{id}_{V\otimes W}(v \otimes w) = v \otimes w$ だから, 補題 10.1.5 より $\mathrm{id}_V \otimes \mathrm{id}_W = \mathrm{id}_{V\otimes W}$.

(2) 任意の $(v, w) \in V \times W$ に対して $(f' \otimes g') \circ (f \otimes g)(v \otimes w) = (f' \otimes g')(f(v) \otimes g(w)) = f'(f(v)) \otimes g'(g(v)) = ((f' \circ f) \otimes (g' \circ g))(v \otimes w)$ となるので, 補題 10.1.5 より主張が成立する.

(3) f, g の逆写像をそれぞれ f^{-1}, g^{-1} とすると, $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_V$ と $g^{-1} \circ g = \mathrm{id}_W$ および (1), (2) から $(f^{-1} \otimes g^{-1}) \circ (f \circ g) = \mathrm{id}_{V\otimes W}$. 同様に $(f \circ g) \circ (f^{-1} \otimes g^{-1}) = \mathrm{id}_{V'\otimes W'}$ が示せるので, 線形写像 $f \otimes g$ は全単射である.

解答 10.8. $n := \dim V$, $m := \dim W$ とし, f, g の適当な基底に関する行列表示を $A \in M(n, \mathbb{K}), B \in M(m, \mathbb{K})$ とする．$\operatorname{tr} f = \operatorname{tr} A$, $\operatorname{tr} g = \operatorname{tr} B$, $\det f = \det A$, $\det g = \det B$ に注意する.

(1) 命題 10.2.6 より $\operatorname{tr}(f \otimes g) = \operatorname{tr}(A \otimes B) = \sum_{k=1}^{m} \operatorname{tr}(A)b_{kk} = \operatorname{tr}(A) \operatorname{tr}(B)$.

(2) 補題 10.2.3 より $f \otimes g = (f \otimes \mathrm{id}_W) \circ (\mathrm{id}_V \otimes g)$ なので $\det(f \otimes g) = \det(f \otimes \mathrm{id}_W) \det(\mathrm{id}_V \otimes g)$. 命題 10.2.6 より $\det(f \otimes \mathrm{id}_W) = \det(A \otimes E_m) = \det(A)^m$, $\det(\mathrm{id}_V \otimes g) = \det(E_n \otimes B) = \det(B)^n$ なので $\det(f \otimes g) = \det(A)^m \det(B)^n$.