§10 テンソル積　体K上　7・4・1

§10.1. 線形空間のテンソル積

<u>Dfn.</u> V, W：線形空間

10.1.2. (1) $S := \bigoplus_{(v,w)\in V\times W} \mathbb{K}\cdot e_{v,w}$ ：直積集合 $V\times W$ を添字集合とする基底をもった線形空間

$$S \supset R := \left\langle \begin{array}{ll} e_{v+v',w} - e_{v,w} - e_{v',w} & (v, v' \in V, \\ e_{v,w+w'} - e_{v,w} - e_{v,w'} & w, w' \in W, \\ e_{cv,w} - c\cdot e_{v,w} & c \in \mathbb{K}) \\ e_{v,cw} - c\cdot e_{v,w} & \end{array} \right\rangle$$

：四種の元で生成される部分空間

$V\otimes W := \underset{\text{商空間}}{S/R}$ ： V と W のテンソル積 □

<u>Thm.</u> 10.1.1. (1) $\otimes : V\times W \to V\otimes W,\ (v, w) \mapsto \overline{e_{v,w}} =: v\otimes w$ ← S/Rにおける同値類

は双線形写像

(2) $\forall U$：線形空間，次は全単射

$b : \mathrm{Hom}(V\otimes W, U) \longrightarrow \{V\times W \to U \mid 双線形\}$,

$f \longmapsto (b(f) : (v,w) \mapsto f(v\otimes w))$

<u>Prf.</u> (1) 第一変数の線形性： $v, v' \in V,\ c, c' \in \mathbb{K},\ w \in W$

$$\begin{aligned}(cv + c'v')\otimes w &= \overline{e_{cv+c'v',w}} \\ &= \overline{e_{cv,w} + e_{c'v',w}} && (Rの生成元、一種目) \\ &= \overline{e_{cv,w}} + \overline{e_{c'v',w}} && (商空間の和) \\ &= \overline{c\cdot e_{v,w}} + \overline{c'e_{v',w}} && (Rの生成元、四種目) \\ &= c\cdot \overline{e_{v,w}} + c'\cdot \overline{e_{v',w}} && (\\ &= c\cdot v\otimes w + c'\cdot v'\otimes w\end{aligned}$$

第二変数も同様：問10.1.

よって⊗は双線形

(2) $b(f): V\times W \to U$ が双線形

$: b(f) = f\circ\otimes$, $\otimes$は第一変数について線形, fは線形, 合成$b(f)$も線形.
第二変数についても, 線形写像の合成なので線形.

bの逆写像の構成

① $\varphi: V\times W\to U$, 双線形, に対し,

$F(\varphi): S\to U$, 線形, $e_{v,w}\mapsto \varphi(v,w)$

② $F(\varphi)(R)=\{0\}$

Rの四種類の生成元rについて $F(\varphi)(r)=0$ を示せば良い.

(i) $r = e_{v+v',w} - e_{v,w} - e_{v',w}$ $(v,v'\in V,\ w\in W)$

$$F(\varphi)(r) = F(\varphi)(e_{v+v',w}) - F(\varphi)(e_{v,w}) - F(\varphi)(e_{v',w})$$
$$= \varphi(v+v',w)-\varphi(v,w)-\varphi(v',w)$$
$$= 0 \quad (\because \varphi\text{の第一変数の線形性})$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(ii)} & r = e_{v,w+w'} - e_{v,w} - e_{v,w'} \\ \text{(iii)} & r = e_{cv,w} - c\,e_{v,w} \\ \text{(iv)} & r = e_{v,cw} - c\,e_{v,w} \end{array}\right\} \text{同様に } F(\varphi)(r)=0$$

問10.2

③ 商空間の普遍性(定理6.2.1)から

線形写像 $\bar F(\varphi): S/R\to U$ が定まる.

$\bar s \mapsto F(\varphi)(s)$

$s\in S$: $\bar s$の代表元

$$\begin{tikzcd} s\in S \arrow[r, "F(\varphi)"] \arrow[d] & U \\ \bar s\in S/R \arrow[ur, dashed, "\bar F(\varphi)"'] & \end{tikzcd}$$

以上より $\bar F: \underbrace{\{V\times W\to U \mid \text{双線形}\}}_{B:=} \to \mathrm{Hom}(V\otimes W, U) =: H$

$\varphi \mapsto \bar F(\varphi)$ が定まる

$\bar F$がbの逆写像

① $b\circ\bar F = id_B$: $\forall\varphi\in B$ $(b\circ\bar F)(\varphi)=\varphi$ を示す. $\overline{e_{v,w}} = v\otimes w$

$\forall(v,w)\in V\times W$ $(b\circ\bar F)(\varphi)(v,w) = \bar F(\varphi)(v\otimes w) = \bar F(\varphi)(\overline{e_{v,w}})$

$$= \varphi(v,w)$$

② $F\circ b = \mathrm{Id}_H$: $\forall f\in H$, $(F\circ b)(f)=f$ を示す.

$V\otimes W = S/R$ は $\{v\otimes w = \overline{e_{v,w}} \mid (v,w)\in V\times W\}$ で生成される.

$(F\circ b)(f)$ と f は共に線形なので、$v\otimes w$ の行先が一致することを示せば良い

$$(F\circ b)(f)(v\otimes w) = F(b(f))(v\otimes w) = F(b(f))(\overline{e_{v,w}})$$
$$= b(f)(v,w) = f(v\otimes w)$$
□

Dfn. 10.1.2 (2). $b:\{V\otimes W\to U \mid 双線形\} \rightleftarrows \{V\times W\to U \mid 双線形\} : F=b^{-1}$

$\qquad\qquad f \qquad\qquad\qquad\qquad \varphi$

$b(f): V\times W\to U$ を f が定める双線形写像

$F(\varphi): V\otimes W\to U$ を φ 〃 線形 〃 という. □

Lem. 10.1.3 $v,v'\in V$, $w,w'\in W$, $c,c'\in K$

$$\begin{cases} (cv+c'v')\otimes w = c\cdot v\otimes w + c'\cdot v'\otimes w \\ v\otimes(cw+c'w') = c\cdot v\otimes w + c'\cdot v\otimes w' \end{cases}$$
が $V\otimes W$ で成立.

Prf. $S=\bigoplus_{(v,w)\in V\times W} K e_{v,w}$ において

$$e_{cv+c'v',w} - (c e_{v,w} + c' e_{v',w})$$
$$= (e_{cv+c'v',w} - e_{cv,w} - e_{c'v',w}) + (e_{cv,w} - c e_{v,w}) + (e_{c'v',w} - c' e_{v',w})$$
$\in R$ なので $\overline{e_{cv+c'v',w}} = \overline{c e_{v,w} + c' e_{v',w'}}$
$$= c\cdot\overline{e_{v,w}} + c'\overline{e_{v',w'}}$$

後半も同様: 問10.3. □

先に Thm. 10.1.9 を説明.

Lem. 10.1.4 $\{v\otimes w \mid (v,w)\in V\times W\}$ は線形空間 $V\otimes W$ を生成する.

Prf. $S=\bigoplus_{(v,w)\in V\times W} K e_{v,w}$ は $\{e_{v,w} \mid (v,w)\in V\times W\}$ で生成される.
よって $V\otimes W = S/R$ は $\{\overline{e_{v,w}} = v\otimes w \mid (v,w)\in V\times W\}$ で生成される □

Lem. 10.1.5. 二つの線形写像 $f,g: V\otimes W \to U$ について,

$$f=g \iff \forall (v,w)\in V\otimes W \quad f(v\otimes w)=g(v\otimes w)$$

(証) $\Rightarrow$ は明らか. $\Leftarrow$ は Lem. 10.1.4 より. □

Lem. 10.1.6 V, W: 線形空間

(1) $W=\mathbb{K}w$ (1次元) のとき $f: V\to V\otimes W,\ v\mapsto v\otimes w$ は同型写像

(2) $V=\mathbb{K}v$ (〃) 〃 $f': W\to V\otimes W,\ w\mapsto v\otimes w$ 〃

Pf. (1) f は線形写像. 問10.4 逆写像をつくる.

$\varphi: V\times W\to V$, $\varphi(v,cw)=cv$ は双線形 問10.4

φ が定める線形写像 $g: V\otimes W\to V,\ v\otimes cw\mapsto cv$ が f の逆写像.

$g=F(\varphi): v\otimes cw=\overline{e_{v,cw}}\mapsto F(\varphi)(e_{v,cw})=\varphi(e_{v,w})$

実際, $g\circ f=\mathrm{id}_V$: $\forall v\in V\quad g(f(v))=g(v\otimes w)=\varphi(v,1\cdot w)=v$ より.

$f\circ g=\mathrm{id}_{V\otimes W}$: $\forall (v,cw)\in V\times W\quad f(g(v\otimes cw))=f(cv)=cv\otimes w=v\otimes cw$

と Lem. 10.1.5 より. □

Eg. 10.1.7 V: 線形空間. $\quad V\otimes\mathbb{K}\cong V\cong \mathbb{K}\otimes V$

$$v\otimes c\mapsto cv\mapsto c\otimes v$$ □

Lem. 10.1.8. V, V_1, V_2, W, W_1, W_2: 線形空間 $\quad V_1\oplus V_2\ni (v_1,v_2)=v_1+v_2$

(1) $f: (V_1\oplus V_2)\otimes W\to (V_1\otimes W)\oplus(V_2\otimes W)$,

$(v_1+v_2)\otimes w\mapsto v_1\otimes w+v_2\otimes w$ は同型写像.

(2) $f': V\otimes(W_1\oplus W_2)\to (V\otimes W_1)\oplus(V\otimes W_2)$,

$v\otimes(w_1+w_2)\mapsto v\otimes w_1+v\otimes w_2$ は同型写像.

略証. (1) のみ. f は線形で, 逆写像は $g(v_1\otimes w+v_2\otimes w)=(v_1+v_2)\otimes w$ □

Thm. 10.1.9. V, W：有限次元. $\{v_i \in V \mid i \in I\}$, $\{w_j \in W \mid j \in J\}$：基底.

$\Rightarrow \{v_i \otimes w_j \mid i \in I, j \in J\}$ は $V \otimes W$ の基底.

特に $\dim(V \otimes W) = \dim V \cdot \dim W$

Pf. $V = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{k} v_i$, $W = \bigoplus_{j \in J} \mathbb{k} w_j$

Lem. 10.1.8より $V \otimes W = \bigoplus_{j \in J} V \otimes \mathbb{k} w_j$

Lem. 10.1.6より $\forall j \in J$. $V \otimes \mathbb{k} w_j \cong V$, $v \otimes w_j \mapsto v$ より

$B_j := \{v_i \otimes w_j \mid i \in I\}$ は $V \otimes \mathbb{k} w_j$ の基底.

よって $\displaystyle \underbrace{\coprod_{j \in J} B_j}_{= \{v_i \otimes w_j \mid i \in I, j \in J\}}$ は $V \otimes W$ の基底. $\square$

問10.5. $\mathbb{C}^2 \ni e_1, e_2$：標準基底. $\{e_{ij} = e_i \otimes e_j \mid (i,j) \in \{1,2\}^2\}$：$\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ の基底

(問題10.1.1) (1) $\begin{pmatrix} i \\ 2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 3\pi \\ 4i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ を e_{ij} 達の線形結合で表せ

$\mathbb{k} = \mathbb{C}$. (2) $t = ae_{11} + be_{12} + ce_{21} + de_{22} \in (\mathbb{C}^2)^{\otimes 2}$ $(a, b, c, d \in \mathbb{C})$

について. $\exists v, w \in \mathbb{C}^2$, $t = v \otimes w \iff ad = bc$

問10.8 V, W：有限次元, $f \in \mathrm{End}(V)$, $g \in \mathrm{End}(W)$

(1) $\mathrm{tr}(f \otimes g) = \mathrm{tr} f \cdot \mathrm{tr} g$ (2) $\det(f \otimes g) = \det(f)^{\dim W} \cdot \det(g)^{\dim V}$

§10.2. 線形写像のテンソル積

Lem. 10.2.1. $f: V \to V'$, $g: W \to W'$: 線形
$b_{f,g}: V \times W \to V' \otimes W'$, $(v, w) \mapsto f(v) \otimes g(w)$ は双線形.

Prf. 問10.6 □

Dfn. 10.2.2. $b_{f,g}$が定める線形写像 (Dfn.10.1.1.(2))を
$$f \otimes g : V \otimes W \to V' \otimes W'$$
と書く : <u>fとgのテンソル積</u> □

Lem. 10.2.3. (1) $\mathrm{id}_V \otimes \mathrm{id}_W = \mathrm{id}_{V \otimes W}$
(2) $f: V \to V'$, $f': V' \to V''$, $g: W \to W'$, $g': W' \to W''$: 線形
$\Rightarrow (f' \circ f) \otimes (g' \circ g) = (f' \otimes g') \circ (f \otimes g)$
(3) $f: V \to V'$, $g: W \to W'$: 同型写像 $\Rightarrow$ $f \otimes g$: 同型写像

Prf. 問10.7. (1)と(2)はLem.10.1.5を用いる. □

Prp. 10.2.6 $f: V \to V'$, $g: W \to W'$: 有限次元線形空間の間の線形写像
$(v_1, \dots, v_l)$: Vの基底, $(v'_1, \dots, v'_k)$: V'の基底, A : fの行列表示,
$(w_1, \dots, w_n)$: W 〃 , $(w'_1, \dots, w'_m)$: W' 〃 , B : g 〃 .
このとき, $f \otimes g : V \otimes W \to V' \otimes W'$の　　$A \in M(k, l ; \mathbb{K})$, $B \in M(m, n ; \mathbb{K})$
$(v_1 \otimes w_1, \dots, v_l \otimes w_1, \dots, v_1 \otimes w_n, \dots, v_l \otimes w_n)$: $V \otimes W$の基底 ← Thm. 10.1.9.
$(v'_1 \otimes w'_1, \dots, v'_k \otimes w'_1, \dots, v'_1 \otimes w'_m, \dots, v'_k \otimes w'_m)$: $V' \otimes W'$ 〃
に関する行列表示は

行列のテンソル積 (Kronecker積) →
$$A \otimes B := \begin{pmatrix} Ab_{11} & \cdots & Ab_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ Ab_{m1} & \cdots & Ab_{mn} \end{pmatrix} \in M(km, ln ; \mathbb{K})$$
$$Ab_{ij} := (a_{pq} b_{ij})_{p,q} \in M(k, l ; \mathbb{K}) : \text{ブロック行列}$$

Prf. $f(v_q) = \sum_{p=1}^{k} v'_p a_{pq}$, $g(w_j) = \sum_{i=1}^{m} w'_i b_{ij}$ より
$(f \otimes g)(v_q \otimes w_j) = f(v_q) \otimes g(w_j) = \sum_{p=1}^{k} \sum_{i=1}^{m} v'_p \otimes w'_i \cdot a_{pq} b_{ij}$ □