現代数学基礎 BI　6 月 27 日分小テスト解答

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
連絡先: yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2023B1.html

問題. V を体 $\mathbb{K}$ 上の線形空間とし, $W \subset V$ をその部分空間とする. V の双対空間 $V^* \coloneqq \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K})$ の部分集合 $W^\perp$ を次で定める.

$$W^\perp \coloneqq \{f \in V^* \mid f(W) = \{0\}\}.$$

(1) $W^\perp$ が V^* の部分空間であることを示せ.
(2) 包含写像 $i\colon W \to V$ の双対写像 $i^*\colon V^* \to W^*$ について, $\mathrm{Ker}\, i^* = W^\perp$ となることを示せ.
(3) $f \in V^*$ の商空間 $V^*/W^\perp$ における同値類を $\overline{f} \in V^*/W^\perp$ と書く. 写像 $\varphi\colon V^*/W^\perp \longrightarrow W^*$ が

$$\varphi(\overline{f}) \coloneqq f \circ i$$

によって well-defined に定まることを示せ.
(4) φ が線形写像であることを示せ.

実は φ は同型写像である (講義ノート命題 8.2.9 (1)).

解答. (1) V^* の零元 0_{V^*} は $0_{V^*}(W) = \{0\}$ を満たすので $0_{V^*} \in W^\perp$. また任意の $f, g \in V^*$ 及び $c, d \in \mathbb{K}$ に対し $(cf + dg)(W) = c \cdot f(W) + d \cdot g(W) = \{0\} + \{0\} = \{0\}$ が成立するので $cf + dg \in W^\perp$. 以上より $W^\perp \subset V^*$ は部分空間.
(2) $f \in V^*$ に対して $i^*(f) = f \circ i$ だから, $\mathrm{Ker}\, i^* = \{f \in V^* \mid f \circ i = 0_{W^*}\} = \{f \in V^* \mid f(W) = \{0\}\} = W^\perp$.
(3) $f, f' \in V^*$ が $\overline{f} = \overline{f'}$ を満たすとすると, $g \coloneqq f' - f \in W^\perp$ であり, $g \circ i = 0_{W^*}$. よって $f' \circ i = (f + g) \circ i = f \circ i + g \circ i = f \circ i + 0_{W^*} = f \circ i$. 従って φ は well-defined.
(4) 任意の $\overline{f}, \overline{g} \in V^*/W^\perp$ と $c, d \in \mathbb{K}$ に対して, $\overline{f}$ の代表元 $f \in V^*$ と $\overline{g}$ の代表元 $g \in V^*$ をとると, $\varphi(c\overline{f} + d\overline{g}) = \varphi(\overline{cf + dg}) = (cf + dg) \circ i = c(f \circ i) + d(g \circ i) = c\varphi(\overline{f}) + d\varphi(\overline{g})$.

コメント. 大きな間違えは 1 点減点, 細かい間違いは 0.5 点減点として, 3 点満点で採点しました. 平均点は 2.3 点でした.

全体的に, 零空間 $\{0\}$ と零元 0 や, 線型写像 f とそれが誘導する写像 $\overline{f}$ の区別などが曖昧な答案がありました. 区別を明瞭にした議論を書いて下さい.

(1) では零元を含むこと (あるいは空でないこと) を書いていない答案が目立ちました.

(2) では, 今まで $\mathrm{Ker} = \{0\}$ を示すことが多かったからか, Ker が含まれる方の証明しか書いていない答案がいくつかありました.

(3), (4) の $\varphi\colon V^*/\mathrm{Ker}\, i^* \to W^*$ は $i^*\colon V^* \to W^*$ が誘導する線形写像 (定理 6.2.1) です.

以上です.