現代数学基礎 BI　6 月 27 日分演習問題

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
連絡先: yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2023B1.html

線形空間や線形写像は体 $\mathbb{K}$ 上のものとする.

問題 9.1 (例 9.1.2)**.** 行列の積を与える写像 $\mu\colon M(l,m;\mathbb{K}) \times M(m,n;\mathbb{K}) \to M(l,n;\mathbb{K})$, $\mu(A,B) := AB$ が双線形であることを示せ.

問題 9.2 (補題 9.1.3)**.** U,V,W を線形空間とする. 線形写像の合成を与える写像 $C\colon \mathrm{Hom}(U,V) \times \mathrm{Hom}(V,W) \to \mathrm{Hom}(U,W)$, $C(f,g) := g \circ f$ が双線形であることを示せ.

問題 9.3 (例 9.2.3)**.** 行列 $A = (a_{ij}) \in M(m,n;\mathbb{K})$ に対して定まる写像 $b_A\colon \mathbb{K}^m \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, $b_A(v,w) := {}^t v A w$ が双線形であることを示せ.

問題 9.4 (例 9.2.4)**.** 線形空間 V とその双対空間 $V^* := \mathrm{Hom}(V,\mathbb{K})$ に対して定まる写像 $\langle \cdot,\cdot \rangle_V \colon V \times V^* \to \mathbb{K}$, $\langle v,f \rangle_V := f(v)$ が双線形であることを示せ.

問題 9.5 (命題 9.2.7)**.** 双線形型式 $b\colon V \times W \to \mathbb{K}$ に対し, $V \ni v \mapsto l_b(v) := b(v,\cdot) \in V^*$ で定まる写像 $l_b\colon V \to W^*$ が線形であることを示せ. また任意の $v \in V$ と $w \in W$ に対し $\langle w, l_b(v) \rangle_W = b(v,w) = \langle v, r_b(w) \rangle_V$ となることを示せ.

問題 9.6 (例 9.2.11)**.** 例 9.2.3 の双線形型式 $b_A\colon \mathbb{K}^m \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ の, $\mathbb{K}^m$ の標準基底および $\mathbb{K}^n$ の標準基底に関する行列表示を求めよ.

問題 9.7 (例 9.2.12)**.** 例 9.2.4 の標準双線形型式 $\langle \cdot,\cdot \rangle_V \colon V \times V^* \to \mathbb{K}$ について, V が有限次元の場合に, V の任意の基底 $B_V = (v_1,\ldots,v_n)$ とその双対基底 $B_V^* = (v_1^*,\ldots,v_n^*)$ に関する行列表示を求めよ.

問題 9.8. V,W を有限次元線形空間とし, $b\colon V \times W \to \mathbb{K}$ を双線形型式とする. B_V, B_W をそれぞれ V,W の基底とし, B_W^* を B_W の双対基底とする. b の B_V, B_W に関する行列表示を A とし, $l_b \in \mathrm{Hom}(V,W^*)$, $l_b(v) := b(v,\cdot)$ の B_V, B_W^* に関する行列表示を L とすると $L = {}^t A$ となることを示せ.

解答 9.1. 任意の $A, A' \in M(l, m; \mathbb{K})$ と $c, c' \in \mathbb{K}$ に対して $\mu(cA + c'A', B) = (cA + cA')B = cAB + c'A'B = c\mu(A, B) + c'\mu(A', B)$. また任意の $B, B' \in M(m, n; \mathbb{K})$ と $c, c' \in \mathbb{K}$ に対して $\mu(A, cB + c'B') = A(cB + cB') = cAB + c'AB' = c\mu(A, B) + c'\mu(A, B')$.

解答 9.2. 任意の $f, f' \in \mathrm{Hom}(U, V)$ と $c, c' \in \mathbb{K}$ に対して $C(cf + c'f', g) = (cf + c'f') \circ g = cf \circ g + c'f' \circ g = cC(f, g) + c'C(f', g)$. また任意の $g, g' \in \mathrm{Hom}(V, W)$ と $c, c' \in \mathbb{K}$ に対して $C(f, cg + c'g') = f \circ (cg + c'g') = cf \circ g + c'f \circ g' = cC(f, g) + c'C(f, g')$.

解答 9.3. 任意の $v, v' \in V$ と $c, c' \in \mathbb{K}$ に対して $b_A(cv + c'v', w) = {}^t(cv + c'v')Aw = c{}^tvAw + c'{}^tv'Aw = cb_A(v, w) + c'b_A(v', w)$. また任意の $w, w' \in W$ と $c, c' \in \mathbb{K}$ に対して $b_A(v, cw + c'w') = {}^tvA(cw + c'w') = c{}^tvAw + c'{}^tvAw' = cb_A(v, w) + c'b_A(v, w')$.

解答 9.4. 任意の $v, v' \in V$ と $c, c' \in \mathbb{K}$ に対して $\langle cv + c'v', f \rangle_V = f(cv + c'v') = cf(v) + c'f(v') = c\langle v, f \rangle_V + c'\langle v', f \rangle_V$. また任意の $f, F' \in V^*$ と $c, c' \in \mathbb{K}$ に対して $\langle v, cf + c'f' \rangle_V = (cf + c'f')(v) = cf(v) + c'f'(v) = c\langle v, f \rangle_V + c'\langle v, f' \rangle_V$.

解答 9.5. l_b の線形性: 任意の $v, v' \in V$ と $c, c' \in \mathbb{K}$ に対して $l_b(cv + c'v') = cl_b(v) + c'l_b(v')$ を示せば良いが, 任意の $w \in W$ に対して $l_b(cv + c'v')(w) = b(cv + c'v', w) = cb(v, w) + c'b(v', w) = cl_b(v)(w) + c'l_b(v')(w) = (cl_b(v) + c'l_b(v'))(w)$ である.

後半: 任意の $v \in V$ と $w \in W$ に対して $\langle w, l_b(v) \rangle_W = l_b(v)(w) = b(v, w) = r_b(w)(v) = \langle v, r_b(w) \rangle_V$.

解答 9.6. $\mathbb{K}^m$ の標準基底を $e_1, \ldots, e_m$, $\mathbb{K}^n$ の標準基底を $e_1, \ldots, e_n$ と書くと, 行列表示の (i, j) 成分は $b_A(e_i, e_j) = {}^te_iAe_j = a_{ij}$. よって行列表示は A.

解答 9.7. 行列表示の (i, j) 成分は $\left\langle v_i, v_j^* \right\rangle = v_j^*(v_i) = \delta_{i,j}$. よって行列表示は n 次単位行列 I_n.

解答 9.8 (その 1)**.** V の基底 $v_1, \ldots, v_n$ と W の基底 $w_1, \ldots, w_m$ 及び双対基底 $w_1^*, \ldots, w_m^*$ について, 求める行列表示を $L = (l_{ij})$ と置くと $l_b(v_j) = \sum_k w_k^* l_{kj}$. $A = (a_{ij})$ と置くと $a_{ji} = b(v_j, w_i) = l_b(v_j)(w_i) = (\sum_k w_k^* l_{kj})(w_i) = l_{ij}$. よって $L = {}^tA$.

解答 9.8 (その 2)**.** W は有限次元なので $e_W \colon W \to W^{**}$, $e_W(w)(f) = f(w)$ $(w \in W,\ f \in W^*)$ は同型であり, $\mathrm{Hom}(W^{**}, V^*) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(W, V^*)$, $\varphi \mapsto \varphi \circ e_W$ となる. そこで $l_b \in \mathrm{Hom}(V, W^*)$ の双対写像 $(l_b)^* \in \mathrm{Hom}(W^{**}, V^*)$ の像 $(l_b)^* \circ e_W \in \mathrm{Hom}(W, V^*)$ が r_b と一致することを示せば, 双対写像の行列表示に関する講義ノート定理 8.2.6 より, l_b の行列表示は r_b の行列表示 A の転置 ${}^tA$ であることが従う. 任意の $w \in W$ に対して $((l_b)^* \circ e_W)(w) = r_b(w)$ を示せば良いが, 任意の $v \in V$ に対して $((l_b)^* \circ e_W)(w)(v) = (e_W(w) \circ l_b)(v) = e_W(w)(l_b(v)) = l_b(v)(w) = b(v, w) = r_b(w)(v)$.