体 $\mathbb{K}$ 上.

§9. 双線形型式

§9.1. 双線形写像

Dfn. 9.1.1. U, V, W: 線形空間. $f: U \times V \to W$ が双線形写像 :⟺
$$\begin{cases} \forall u \in U, & f(u, \cdot): V \to W \text{ が線形 かつ} \\ \forall v \in V, & f(\cdot, v): U \to W \quad〃. \end{cases}$$
□

Exm. 9.1.2. 行列の積 $\cdot : M(l, m; \mathbb{K}) \times M(m, n; \mathbb{K}) \to M(l, n; \mathbb{K})$,
$(A, B) \mapsto AB$ は双線形写像 ☺ 問9.1.

Lem. 9.1.3. U, V, W: 線形空間.
線形写像の合成 $\circ$: $\mathrm{Hom}(U, V) \times \mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{Hom}(U, W)$
は双線形 $\qquad (f, g) \longmapsto g \circ f$

☺ 問9.2.

Rmk. $U = \mathbb{K}^n$, $V = \mathbb{K}^m$, $W = \mathbb{K}^l$ として,
線形写像の標準基底に関する行列表示を考えて
$\mathrm{Hom}(U, V) \cong M(m, n; \mathbb{K})$, $f \mapsto (b_{ij}) =: B$, $f(e_j) = \sum_{i=1}^m e_i b_{ij}$
$\mathrm{Hom}(V, W) \cong M(l, m; \mathbb{K})$, $g \mapsto (a_{ij}) =: A$, $g(e_j) = \sum_{i=1}^l e_i a_{ij}$
$\mathrm{Hom}(U, W) \cong M(l, n; \mathbb{K})$, $g \circ f \mapsto AB$
なので. $M(m, n; \mathbb{K}) \times M(l, m; \mathbb{K}) \to M(l, n; \mathbb{K})$,
$\qquad (B, A) \longmapsto AB$ □

§9.2. 双線形型式

Dfn. 9.2.1. V, W : 線形空間 ↙ $\mathbb{K}$上の線形空間

双線形写像 $V \times W \to \mathbb{K}$: <u>双線形型式</u> $\square$

Exm. 9.2.3 $A \in M(m,n;\mathbb{K})$, $b_A : \mathbb{K}^m \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, $b_A(v,w) := {}^t v \cdot A \cdot w$

は双線形型式 問9.3 $\square$

Exm. 9.2.4. V : 線形空間. $V^* := \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K})$: 双対空間

$\langle \cdot, \cdot \rangle_V : V \times V^* \to \mathbb{K}$, $\langle v, f \rangle_V := f(v)$

は双線形型式. 問9.4 : <u>標準双線形型式</u> $\square$

Prp. 9.2.6. $b : V \times W \to \mathbb{K}$: 双線形型式.

$\forall w \in W$ $r_b(w) := b(\cdot, w) \in V^*$. ($\because$ 双線形写像の定義)

この時 $r_b : W \to V^*$, $w \mapsto r_b(w)$ は線形,

つまり $r_b \in \mathrm{Hom}(W, V^*)$ $\square$

$\forall w, w' \in W$, $\forall c, c' \in \mathbb{K}$ $r_b(cw + c'w') = c \cdot r_b(w) + c' \cdot r_b(w')$

を示す. $\forall v \in V$で $r_b(cw + c'w')(v) = b(v, cw + c'w')$

$= c \cdot b(v,w) + c' \cdot b(v,w') = c \cdot r_b(w)(v) + c' \cdot r_b(w')(v)$

$= (c \cdot r_b(w) + c' \cdot r_b(w'))(v)$ $\square$

Prp. 9.2.7. $b : V \times W \to \mathbb{K}$: 双線形.

$\forall v \in V$, $l_b(v) := b(v, \cdot) \in W^*$

この時 $l_b \in \mathrm{Hom}(V, W^*)$.

また $\forall v \in V$, $\forall w \in W$, $\langle w, l_b(v) \rangle_W = b(v,w) = \langle v, r_b(w) \rangle_V$

問9.5. $\square$

Dfn. 9.2.8. $b : V \times W \to \mathbb{K}$: 双線形

(1) $r_b : W \to V^*$ が単射のとき，b は W で非退化 という.

(2) $l_b : V \to W^*$ 〃 ，〃 V 〃 □

Exm. 9.2.9. 標準双線形型式 $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V^* \to \mathbb{K}$，$\langle v, f \rangle = f(v)$

は V で非退化かつ V^* で非退化

∵ $r : V^* \to V^*$，$r(f) = \langle \cdot, f \rangle$ が単射.

$r(f) = 0$ なら $\forall v \in V$ $0 = r(f)(v) = \langle v, f \rangle = f(v)$.
よって $f = 0$.

$l : V \to V^{**}$，$l(v) := \langle v, \cdot \rangle$ が単射.

$l(v) = 0$ なら $\forall f \in V^*$ $0 = l(v)(f) = \langle v, f \rangle = f(v)$
$v \neq 0$ なら，v を含む V の基底を1つ取って，$f \in V^*$ を
$f(v) = 1$，f(その他) $= 0$ で定めると，$f \neq 0$ より矛盾.
よって $v = 0$. □

Dfn. 9.2.10. V, W : 有限次元，$b : V \times W \to \mathbb{K}$: 双線形.

$B_V = (v_1, \ldots, v_n)$，$B_W = (w_1, \ldots, w_m)$: V, W の基底

$$\begin{pmatrix} b(v_1, w_1) & \cdots & b(v_1, w_m) \\ \vdots & & \vdots \\ b(v_n, w_1) & \cdots & b(v_n, w_m) \end{pmatrix} \in M(n, m; \mathbb{K})$$: b の B_V, B_W に関する行列表示. □

Exm. 9.2.11/12 9.2.3 の $b_A : \mathbb{K}^m \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ の標準基底に関する行列表示は A. 問9.6

9.2.4 で $\dim V = n < \infty$ の $\langle \cdot, \cdot \rangle_V : V \times V^* \to \mathbb{K}$ の V の基底と双対基底 〃 I_n 問9.7 □

Lem. (問題9.2.5) V, W：有限次元，$b: V\times W \to K$：双線形．
B_V, B_W：V, Wの基底，B_V^*, B_W^*：B_V, B_Wの双対基底．
（bのB_V, B_Wに関する行列表示A）＝（$r_b: W\to V^*$のB_W, B_V^*に関する行列表示R）
${}^tA$ ＝（$l_b: V\to W^*$のB_V, B_W^*　〃　L）

(証) $B_V = (v_1, \dots, v_n)$，$B_W = (w_1, \dots, w_m)$，$B_V^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$，$v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$

$r_b(w_j) = \sum_{i=1}^n v_i^* r_{ij}$，$R = (r_{ij})$．
$\;\;\;\;\; \overset{\shortparallel}{b(\cdot, w_j)}$

$\therefore\ a_{ij} = b(v_i, w_j) = r_b(w_j)(v_i)$　$\leftarrow A = (a_{ij})$
$= (\sum_{k=1}^n v_k^* r_{kj})(v_i) = r_{ij}$　$\therefore R = A$

$L = {}^tA$も同様（問9.8）　$\square$

Prp. 9.2.13 V, W：有限次元，$b: V\times W \to K$：双線形
(1) $\mathrm{rank}(r_b: W \to V^*) = \mathrm{rank}(l_b: V \to W^*)$
(2) $\dim V = \dim W$なら
bがVで非退化 $\Leftrightarrow$ l_bは同型 $\Leftrightarrow$ r_bは同型 $\Leftrightarrow$ bはWで非退化

(証)(1) $\mathrm{rank}\, r_b = \dim \mathrm{Im}\, r_b = \mathrm{rank}\, R = \mathrm{rank}\, A$，同様に $\mathrm{rank}\, l_b = \mathrm{rank}\, {}^tA$
あとは $\mathrm{rank}\, A = \mathrm{rank}\, {}^tA$ より．

(2) $\dim V^* = \dim V = \dim W$ と準同型定理 $W/\ker(r_b) \simeq \mathrm{Im}\, r_b \subset V^*$ から
bがWで非退化 $:\Leftrightarrow$ r_bが単射 $\Leftrightarrow$ r_bが同型 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rank}\, r_b = \dim V^*$
同様に $\dim W^* = \dim V$ と $V/\ker(l_b) \simeq \mathrm{Im}\, l_b \subset W^*$ から
bがVで非退化 $:\Leftrightarrow$ l_bが単射 $\Leftrightarrow$ l_bが同型 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rank}\, l_b = \dim W^*$．
これらと $\dim V^* = \dim W^*$ より．　$\square$

Dfn. 9.2.14 V, W：有限次元，$b: V\times W \to \mathbb{K}$：双線形
(1) $\operatorname{rank} b := \operatorname{rank} r_b$ $(= \operatorname{rank} l_b)$
(2) bが非退化 :$\Leftrightarrow$ bがVで非退化かつWで非退化 □

Cor. 9.2.15 V, W：有限次元．$b: V\times W \to \mathbb{K}$：非退化双線形 $\Rightarrow$ $V \cong W$.

$\because$) $l_b: V \to W^*$と$r_b: W \to V^*$が単射 $\therefore \dim V \leqq \dim W^*$, $\dim W \leqq \dim V^*$
これと $\dim W^* = \dim W$, $\dim V^* = \dim V$ より．$\dim V = \dim W$ □

Prp. 9.2.16 V, W：有限次元．$\dim V = \dim W$．$b: V\times W \to \mathbb{K}$：双線形
このとき b：非退化 $\Leftrightarrow$ bの行列表示は可逆．

$\because$) B_V, B_W：V, Wの基底．Lem.より
(bのB_V, B_Wに関する行列表示A) $=$ ($r_b: W \to V^*$のB_W, B_V^*に関する行列表示R)
$\therefore$ Aは可逆 $\Leftrightarrow$ Rは可逆 $\Leftrightarrow$ r_bは同型 $\Leftrightarrow$ bはVで非退化 $\Leftrightarrow$ bはWで非退化

Prp. 9.2.13.

□