現代数学基礎 BI　6 月 20 日分小テスト解答

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
連絡先: yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2023B1.html

問題. 二次以下の実数係数多項式の全体からなる実線形空間を

$$V := \{f(x) = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 \mid f_0, f_1, f_2 \in \mathbb{R}\}$$

と書く. そして $D \in \operatorname{End}(V)$ と $I \in \operatorname{Hom}(V, \mathbb{R})$ を次式で定める.

$$D\bigl(f(x)\bigr) := \frac{d}{dx}\bigl((1+x)f(x)\bigr), \quad I\bigl(f(x)\bigr) := \int_0^1 f(x)dx \quad (f(x) \in V).$$

(1) $\operatorname{Ker} D$ と $\operatorname{Im} D$ を求めよ.

(2) V の基底 $1, 1+2x, 2x+3x^2$ に関する D の表現行列を求めよ.

(3) $\operatorname{Ker} I$ と $\operatorname{Im} I$ の基底を与えよ.

解答. $f(x) = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 \in V$ に対して $D(f) = \bigl(f_0 + (f_0+f_1)x + (f_1+f_2)x^2 + f_2 x^3\bigr)' = (f_0+f_1) + 2(f_1+f_2)x + 3f_2 x^2$, $I(f) = f_0 + \frac{1}{2}f_1 + \frac{1}{3}f_2$ となる.

(1) 冒頭の計算から $f \in \operatorname{Ker} D$ なら $f_0+f_1 = f_1+f_2 = f_2 = 0$ となるので $f_0 = f_1 = f_2 = 0$, つまり $f = 0$. よって $\operatorname{Ker} D = \{0\}$. また V の基底 $1, x, x^2$ が $1 = D(1)$, $x = D(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2})$, $x^2 = D(\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{3})$ と書けるので $\operatorname{Im} D = V$.

(2) $\bigl(D(1), D(1+2x), D(2x+3x^2)\bigr) = (1, 3+4x, 2+10x+9x^2) = (1, 1+2x, 2x+3x^2)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(3) 冒頭の計算から $\dim \operatorname{Ker} I = 2$ で, 基底は例えば $1-2x$, $1-3x^2$.
すると準同型定理から $\dim \operatorname{Im} I = \dim V - \dim \operatorname{Ker} I = 3 - 2 = 1$ なので, $\operatorname{Im} I = \mathbb{R}$. 基底は例えば 1.

コメント. 各小問を 1 点とし, 3 点満点で採点しました. 平均点は 2.0 点でした.

(1) の一部の答案では結論が線形空間になっていないもの ($\operatorname{Ker} D = f_0$ や $\operatorname{Ker} D = \{f_1/f_0\}$ など) がありましたが, $\operatorname{Ker} D$ は定義域 V の部分空間であり, $\operatorname{Im} D$ は値域 V の部分空間なので, どちらも線形空間になるはずです.

また (3) で基底の元を $1, x, x^2$ の係数を並べたベクトルで書いている答案が少数ありましたが, 上の解答の様に多項式で答えるべきです. 基底の元は V の元であることを意識して下さい.

別解として, (2) の表現行列を先に求め, それが正則行列だから D は同型で, 特に (1) の結論 $\operatorname{Ker} D = \{0\}$, $\operatorname{Im} D = V$ を得ることもできます.

以上です.