現代数学基礎 BI　6 月 20 日分演習問題

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
連絡先: yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2023B1.html

線形空間や線形写像は体 $\mathbb{K}$ 上のものとする.

問題 8.1 (定義 8.1.1)**.** 線形空間 V に対して, V から $\mathbb{K}$ への線形写像全体のなす集合 $V^* := \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K})$ が線形空間であることを説明せよ. 特に和, スカラー倍, 零元を具体的に与えること.

問題 8.2 (例 8.1.2)**.** n 次元数ベクトル空間 $\mathbb{K}^n$ の双対空間 $(\mathbb{K}^n)^*$ と n 次元行ベクトル全体がなす線形空間 $M(1, n; \mathbb{K})$ を考える. 写像 $M(1, n; \mathbb{K}) \to (\mathbb{K}^n)^*$, $a \mapsto l_a$ (a の左掛算写像) が同型写像であることを示せ.

問題 8.3 (例 8.1.7)**.** 集合 X 上の $\mathbb{K}$ 値写像全体がなす線形空間 $\mathrm{Map}(X, \mathbb{K})$ を M と略記する. 各 $x \in X$ に対して, 写像 $\mathrm{ev}_x \colon M \to \mathbb{K}$ を $\mathrm{ev}_x(f) := f(x)$ $(f \in M)$ で定義する. $\mathrm{ev}_x \in M^*$ を示せ.

問題 8.4 (定理 8.1.7 の証明)**.** V を有限次元線形空間とし, $n := \dim V$ とする. $v_1, \ldots, v_n$ を V の基底とし, それに対して $v_n^*, \ldots, v_n^* \in V^*$ を条件 $v_i^*(v_j) = \delta_{i,j}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ で定める. 任意の $\varphi \in V^*$ が v_i^* 達の線形結合で書けることを示せ.

問題 8.5 (命題 8.2.4)**.** U, V, W を線形空間とする. 以下の主張を示せ.

(1) $(\mathrm{id}_V)^* = \mathrm{id}_{V^*}$.
(2) 任意の $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$ と $g \in \mathrm{Hom}(V, W)$ に対して $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.
(3) 任意の $f, g \in \mathrm{Hom}(U, V)$ と $c, d \in \mathbb{K}$ に対して $(cf + dg)^* = cf^* + dg^*$.

問題 8.6. V が有限次元線形空間なら, 命題 8.3.2 の単射線形写像 $e_V \colon V \to V^{**}$, $v \mapsto \mathrm{ev}_v$ が同型写像であることを証明せよ.

解答 8.1. $f, g \in V^*$ の和 $f+g\colon V \to \mathbb{K}$ を $(f+g)(v) \coloneqq f(v)+g(v)$ $(v \in V)$ で定めると $f+g \in V^*$. $f \in V^*$ の $c \in \mathbb{K}$ によるスカラー倍 $cf\colon V \to \mathbb{K}$ を $(cf)(v) \coloneqq c \cdot f(v)$ で定めると $cf \in V^*$. 零元は恒等写像 $0\colon V \to \mathbb{K}$, $v \mapsto 0$.

解答 8.2. (線形性) 任意の $a, b \in M(1, n; \mathbb{K})$ と $c, d \in \mathbb{K}$ に対して, $l_{ca+db}(v) = (ca+db)v = c(av)+d(bv) = cl_a(v)+dl_b(v) = (cl_a+dl_b)(v)$ が任意の $v \in V$ に対して成立するので, $l_{ca+db} = cl_a + dl_b$.

(単射性) 線形性を既に示したので, $a = (a_1 \cdots a_n) \in M(1, n; \mathbb{K})$ が $l_a = 0$ を満たすなら $a = 0$ となることを示せば良い. 任意の $v = {}^t(v_1 \cdots v_n) \in \mathbb{K}^n$ に対して $0 = l_a(v) = av = \sum_{i=1}^n a_i v_i$ だから, 特に $v = e_i$ (第 i 単位ベクトル) とすれば $a_i = 0$. これが任意の $i = 1, \ldots, n$ に対して成立するので $a = 0$.

(全射性) 引き続き単位ベクトル $e_i \in \mathbb{K}^n$ $(i = 1, \ldots, n)$ を用いる. その転置 ${}^te_i \in M(1, n; \mathbb{K})$ を用いると, 任意の $\varphi \in V^*$ は $\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i) l_{{}^te_i}$ と書ける. 実際, 任意の $v = {}^t(v_1 \cdots v_n) \in V^*$ について, $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$ および $v_i = {}^te_i v = l_{{}^te_i}(v)$ が成立するから, $\varphi(v) = \varphi(\sum_{i=1}^n v_i e_i) = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i) v_i = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i) l_{{}^te_i}(v) = (\sum_{i=1}^n \varphi(e_i) l_{{}^te_i})(v)$.

解答 8.3. 任意の $f, g \in M$ と $c, d \in \mathbb{K}$ に対して $\mathrm{ev}_x(cf+dg) = (cf+dg)(x) = c \cdot f(x) + d \cdot g(x) = c\,\mathrm{ev}_x(f) + d\,\mathrm{ev}_x(g)$.

解答 8.4. 任意の $\varphi \in V^*$ は $\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi(v_i) v_i^*$ と書けることを示す. まず任意の $v \in V$ について, $v = \sum_{i=1}^n c_i v_i$, $c_i \in \mathbb{K}$ と書くと $c_i = v_i^*(v)$ となる. 実際, $v_i^*(v) = v_i^*(\sum_{j=1}^n c_j v_j) = \sum_{j=1}^n c_j v_i^*(v_j) = \sum_{i=1}^n c_j \delta_{i,j} = c_i$. すると, 任意の $v \in V$ は $v = \sum_{i=1}^n v_i^*(v) v_i$ と書けるから, $\varphi(v) = \varphi(\sum_{i=1}^n v_i^*(v) v_i) = \sum_{i=1}^n v_i^*(v) \varphi(v_i) = (\sum_{i=1}^n \varphi(v_i) v_i^*)(v)$. これで主張が示せた.

解答 8.5. 講義ノート該当箇所を参照.

解答 8.6. 準同型定理より $\dim V = \dim \operatorname{Ker} e_V + \dim \operatorname{Im} e_V$. e_V は単射だから $\dim \operatorname{Ker} e_V = 0$. また定理 8.1.7 の $V \cong V^*$ より $V \cong V^* \cong (V^*)^* = V^{**}$ なので $\dim V^{**} = \dim V$. 以上より $\dim V^{**} = \dim \operatorname{Im} e_V$, つまり $\operatorname{Im} e_V = V^{**}$ となるので, e_V は全射. よって e_V は全単射な同型写像である.