§8 線形双対

§8.1. 双対空間

断わらない限り 体$\mathbb{K}$上.

Dfn. 8.1.1. V: 線形空間.

← 問8.1.

$V^* := \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K}) = \{\varphi: V \to \mathbb{K} \mid 線形\}$: 線形空間

V^*: Vの双対空間 (dual space), V^*の元: V上の線形形式 □

Eg. 8.1.2. ($V = \mathbb{K}^n$の双対) $a = (a_1, \dots, a_n) \in M(1, n; \mathbb{K})$ 行ベクトル

$l_a: \mathbb{K}^n = M(n, 1; \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \mapsto av = \sum_{i=1}^n a_i v_i$

すると $l_a \in (\mathbb{K}^n)^*$. 更に

← 問8.2.

$M(1, n; \mathbb{K}) \to (\mathbb{K}^n)^*$, $a \mapsto l_a$ は同型写像 □

$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$, $(cf)(x) = c \cdot f(x)$ で

Eg. 8.1.3. (評価写像) X: 集合. $\mathrm{Map}(X, \mathbb{K}) = \{f: X \to \mathbb{K}\}$: 線形空間

$x \in X$ $\quad ev_x: \mathrm{Map}(X, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $f \mapsto f(x)$

すると $ev_x \in \mathrm{Map}(X, \mathbb{K})^*$. 問8.3. □

Thm. 8.1.7. V: 有限次元線形空間. $n := \dim V$

$v_1, \dots, v_n$: Vの基底

$\Rightarrow \exists!\ v_1^*, \dots, v_n^*$: V^*の基底 s.t. $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$

特に $\dim V^* = n$, $V^* \cong V$

Pf. 線形写像は基底の行先から一意に定まる (Prp.3.1.3) ので

$v_1^*, \dots, v_n^* \in V^*$ が一意に定まる. 基底であることを示す.

(生成) $\forall \varphi \in V^*$ $\quad \varphi_i := \varphi(v_i) \in \mathbb{K}$ $(i = 1, \dots, n)$ とすれば

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i v_i^* \quad 問8.4.$$

(一次独立) $\sum_{i=1}^n c_i v_i^* = 0$, $c_i \in \mathbb{K}$ なら,

$\forall j = 1, \dots, n$. $\quad 0 = \left(\sum_{i=1}^n c_i v_i^*\right)(v_j) = \sum_{i=1}^n c_i v_i^*(v_j)$

$= \sum_{i=1}^n c_i \delta_{ij} = c_j$ □

Dfn. 8.1.8 $v_1^*, \dots, v_n^*$: $v_1, \dots, v_n$の双対基底. □

§8.2. 双対写像

Prp. 8.2.1. $f : V \to W$: 線形写像

(1) 各 $\varphi \in W^*$ に対して $f^*(\varphi) := \varphi \circ f : V \to W \to \mathbb{K}$ は線形.

つまり $f^*(\varphi) \in V^*$

(2) $f^* : W^* \to V^*$, $\varphi \mapsto f^*(\varphi) = \varphi \circ f$ は線形.

つまり $f^* \in \mathrm{Hom}(W^*, V^*)$

Pf. (1) 線形写像の合成は線形写像. (Lem. 3.2.1)

(2) $\forall \varphi, \psi \in W^*$, $\forall c, d \in \mathbb{K}$. $f^*(c\varphi + d\psi) = c \cdot f^*(\varphi) + d \cdot f^*(\psi)$ を示す.

$\forall x \in V$

$$
\begin{aligned}
(f^*(c\varphi + d\psi))(x) &= (c\varphi + d\psi)(f(x)) \\
&= (c\varphi)(f(x)) + (d\psi)(f(x)) && [\text{線形写像の+の定ギ}] \\
&= c \cdot \varphi(f(x)) + d \cdot \psi(f(x)) && [\text{スカラー倍の定ギ}] \\
&= c \cdot (f^*(\varphi))(x) + d \cdot (f^*(\psi))(x) && [f^* \text{の定ギ}] \\
&= (c \cdot f^*(\varphi))(x) + (d \cdot f^*(\psi))(x) && [\text{スカラー倍の定ギ}] \\
&= (c \cdot f^*(\varphi) + d \cdot f^*(\psi))(x)
\end{aligned}
$$

□

Dfn. 8.2.2. $f^* \in \mathrm{Hom}(W^*, V^*)$: $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ の<u>双対写像</u> □

E.g. 8.2.3. (行列の左掛算写像の双対)

$A = (a_{ij}) \in M(m, n ; \mathbb{K})$

$l_A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \longmapsto Av$

$(l_A)^*$のこと

l_A の双対写像 $l_A^* \in \mathrm{Hom}((\mathbb{K}^m)^*, (\mathbb{K}^n)^*)$ を考える.

E.g. 8.1.2. より $(\mathbb{K}^m)^* \cong M(1, m ; \mathbb{K})$, $l_a \longleftarrow\!\shortmid\, a = (a_1, \dots, a_m)$,

$$
\begin{array}{ccccccc}
l_a & \in & (\mathbb{K}^m)^* & \xrightarrow{l_A^*} & (\mathbb{K}^n)^* & \ni & l_{aA} \\
\uparrow & & \wr\!\shortparallel & \circlearrowright & \wr\!\shortparallel & & \nwarrow \\
a & \in & M(1, m ; \mathbb{K}) & \xrightarrow{r_A} & M(1, n ; \mathbb{K}) & \ni & aA
\end{array}
$$

$l_A^*(l_a) = l_a \circ l_A = l_{aA}$

: aA の左掛算写像

右掛算写像

つまり l_A^* は $r_A : M(1, m ; \mathbb{K}) \to M(1, n ; \mathbb{K})$, $a \mapsto aA$ と同一視できる

Prp. 8.2.4. U, V, W：線形空間

(1) $\mathrm{id}_V^* = \mathrm{id}_{V^*}$

$(\mathrm{id}_V)^*$のこと　$\mathrm{id}(V^*)$のこと

(2) $\forall f \in \mathrm{Hom}(U,V), \forall g \in \mathrm{Hom}(V,W) \quad (g \circ f)^* = f^* \circ g^*$

(3) $\forall f, g \in \mathrm{Hom}(U,V), \forall c, d \in \mathbb{K}, \quad (cf+dg)^* = c \cdot f^* + d \cdot g^*$

Prf 問8.5.

Exm. 8.2.5 $A \in M(l, m ; \mathbb{K}),\ B \in M(m, n ; \mathbb{K})$ ：行列

((2)の例)

$l_A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^l),\ l_B \in \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ ：左乗法写像

$l_A \circ l_B = l_{AB} : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m \longrightarrow \mathbb{K}^l,\ v \mapsto Bv \mapsto ABv$

$(l_A \circ l_B)^* = l_{AB}^* = l_B^* \circ l_A^* : (\mathbb{K}^l)^* \longrightarrow (\mathbb{K}^m)^* \longrightarrow (\mathbb{K}^n)^*$

$l_a \mapsto l_{aA} \mapsto l_{aAB}$ □

Thm. 8.2.6. V, W：有限次元線形空間，$n := \dim V,\ m := \dim W$.

$(v_1, \dots, v_n)$：Vの基底．$(w_1, \dots, w_m)$：Wの基底

$(v_1^*, \dots, v_n^*)$：(v_i)の双対基底．$(w_1^*, \dots, w_m^*)$：(w_i)の双対基底．

$f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ の $(v_i), (w_i)$に関する行列表示 $A \in M(m, n ; \mathbb{K})$

$\Rightarrow f^* \in \mathrm{Hom}(W^*, V^*)$の$(v_i^*), (w_i^*)$　〃　は

転置行列 ${}^tA \in M(n, m ; \mathbb{K})$

Prf. 求める行列表示を $B = (b_{ij}) \in M(n, m ; \mathbb{K})$とすると．$\forall j = 1, \dots, m$で

$$f^*(w_j^*) = \sum_{k=1}^n v_k^* b_{kj} \quad \in V^*$$

$v_i \in V$での値を考えると　$(i = 1, \dots, n)$

$$(f^*(w_j^*))(v_i) = w_j^*(f(v_i)) \quad [f^*の定義]$$

$A = (a_{ij})$ →

$$= w_j^*\left(\sum_{k=1}^m w_k a_{ki}\right) \quad [行列表示の定義]$$

$$= \sum_{k=1}^m a_{ki} w_j^*(w_k) = \sum_{k=1}^m a_{ki} \delta_{jk} = a_{ji}$$

$$\left(\sum_{k=1}^n v_k^* b_{kj}\right)(v_i) = \sum_{k=1}^n b_{kj} v_k^*(v_i) = \sum_{k=1}^n b_{kj} \delta_{k,i} = b_{ij}$$

$\therefore\ \forall i, j \quad b_{ij} = a_{ji} \qquad \therefore B = {}^tA$ □

§8.3. 再双対空間

<u>Rmk.</u> V:線形空間. $\dim V<\infty$ なら $V^*\cong V$. (Thm. 8.1.7) だが、
(問 8.1.5.6) $V=\mathbb{K}[x]\cong\bigoplus_{n=0}^{\infty}\mathbb{K}$, $\sum_{n=0}^{d}c_nx^n\mapsto(c_0,\dots,c_d,0,0,\dots)$
だと $\leftarrow \mathbb{K}^N$ $\leftarrow \mathbb{K}^{\oplus N}$, $N=\mathbb{Z}_{\geq 0}$

$V^*\cong\prod_{n=0}^{\infty}\mathbb{K}$, $\varphi\mapsto(\varphi(x^0),\varphi(x^1),\varphi(x^2),\dots)$ ← 0でない
$\cong\mathbb{K}[[x]]$ $\mapsto\sum_{n=0}^{\infty}\varphi(x^n)\cdot x^n$ 成分は有限個とは限らない

なので、 $V^*\not\cong V$ □

<u>Dfn. 8.3.1</u> V:線形空間.
$V^{**}:=(V^*)^*$: 再双対空間. □

<u>Prp. 8.3.2.</u> V:線形空間
(1) $\forall v\in V$ $ev_v:V^*\to\mathbb{K}$, $f\mapsto f(v)$
は V^*上の線形型式, つまり $ev_v\in V^{**}$ (cf. Exm 8.1.3)
(2) $ev: V\to V^{**}$, $v\mapsto ev_v$ は単射線形

<u>Pf.</u> (1) $\forall f,g\in V^*$, $\forall c,d\in\mathbb{K}$
$ev_v(cf+dg)=(cf+dg)(v)=c\cdot f(v)+d\cdot g(v)$
$=c\cdot ev_v(f)+d\cdot ev_v(g)$

(2) [線形] $\forall v,w\in V$, $\forall c,d\in\mathbb{K}$. $ev(cv+dw)=c\,ev(v)+d\,ev(w)$を示す
$\forall\varphi\in V^*$. $(ev(cv+dw))(\varphi)=ev_{cv+dw}(\varphi)$
$=\varphi(cv+dw)=c\varphi(v)+d\cdot\varphi(w)$ ($\because\varphi$:線形)
$=c\cdot ev_v(\varphi)+d\cdot ev_w(\varphi)=(c\cdot ev_v+d\,ev_w)(\varphi)$
$=(c\cdot ev(v)+d\cdot ev(w))(\varphi)$

[単射] $ev(v)=0_{V^{**}}\Rightarrow v=0$ を示せば良い. 対偶を示す.
$v\neq0$なら, vを含むVの基底を取り, $f\in V^*$を $f(v)=1$, f(その他)$=0$
で定めれば, $(ev(v))(f)=f(v)\neq0$. より $ev(v)\neq 0_{V^{**}}$ □

Rmk. のつづき.

(1) $\dim V < \infty$ なら $ev : V \longrightarrow V^{**}$ は同型 : 問8.6.

(2) $V = \mathbb{K}[x] \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^{\oplus \mathbb{N}}$, $\sum_{n=0}^{d} c_n x^n \mapsto (c_0, c_1, \cdots, c_d, 0, 0, \cdots)$

$V^* \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}[[x]]$, $\varphi \mapsto (\varphi(x^0), \varphi(x^1), \cdots) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(x^n) x^n$

$\delta_n \in V^*$, $\delta_n(x^m) = \delta_{n,m}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$

$\delta_0, \delta_1, \cdots$ は V^* の基底.

$(V^* \ni \forall \varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(x^n) \delta_n)$

$V^{**} \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}[[x]]$, $f \mapsto (f(\delta_0), f(\delta_1), \cdots) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} f(\delta_n) x^n$

$$\begin{array}{ccccc} V = \mathbb{K}[x] & \xrightarrow{ev} & V^{**} & \cong & \mathbb{K}[[x]] \\ x^n & \longmapsto & (f \mapsto f(\delta_n)) & \mapsto & x^n \end{array}$$

$ev : V \hookrightarrow V^{**}$ は埋め込み $\mathbb{K}[x] \hookrightarrow \mathbb{K}[[x]]$ と同一視できる. □