現代数学基礎 BI　中間試験 解答

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

問題 1. n を正整数, E を n 次元実ベクトル全体がなす集合とし, E 上の実数値函数の集合 F を次で定める.

$$F := \left\{ f \colon E \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{任意の } x, y \in E \text{ に対して } f(x) - f(y) = f(x-y) - f(0), \\ \text{任意の } c \in \mathbb{R} \text{ と } x \in E \text{ に対して } f(cx) - f(0) = c(f(x) - f(0)) \end{array} \right\}.$$

(1) $f, g \in F$ と $c \in \mathbb{R}$ に対して, 2 つの写像 $f+g, cf \colon E \to \mathbb{R}$ を $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$, $(cf)(x) := c \cdot f(x)$ で定める. この和とスカラー倍について, F が実線形空間であることを説明せよ. 以下の点に留意すること.
- 零元を明記する.
- 和が F 上の二項演算であることを確かめる.
- スカラー倍が F の元を定めることを確かめる.
- 線形空間の諸公理は確認しなくてよい.

(2) 任意の $f \in F$ と $x, y \in E$ および $c, d \in \mathbb{R}$ に対し, $f(cx+dy) - f(0) = c(f(x) - f(0)) + d(f(y) - f(0))$ が成立することを示せ.

各 $i = 1, \ldots, n$ に対して $e_i = {}^t(0 \ \cdots \ 0 \ 1 \ 0 \ \cdots \ 0) \in E$ を第 i 単位ベクトルとし, 各 $x \in E$ を $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $x_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$ と表す. そして実数値函数 $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon E \times E \to \mathbb{R}$ を, $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, y = \sum_{i=1}^n y_i e_i \in E$ に対して $\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i$ で定める. また積集合の元 $(v, r) \in E \times \mathbb{R}$ に対して, $a_{v,r} \colon E \to \mathbb{R}$ を $a_{v,r}(x) := \langle v, x \rangle + r$ で定める.

(3) $a_{v,r} \in F$ を示せ.

(4) 積集合の二元 $(v, r), (w, s) \in E \times \mathbb{R}$ に対して, $a_{v,r} = a_{w,s}$ なら $(v, r) = (w, s)$ となることを示せ.

(5) 任意の $f \in F$ に対し, $(v, r) \in E \times \mathbb{R}$ が存在して $f = a_{v,r}$ となることを示せ.

(4) と (5) より, 集合としての全単射 $E \times \mathbb{R} \to F$, $(v, r) \mapsto a_{v,r}$ がある.

(6) 任意の $a_{v,r}, a_{w,s} \in F$ と $c, d \in \mathbb{R}$ に対して $ca_{v,r} + da_{w,s} = a_{cv+dw, cr+ds}$ であることを示せ.

(7) $V := \{a_{v,0} \in F \mid v \in E\}$ および $R := \{a_{0,r} \in F \mid r \in \mathbb{R}\}$ が F の部分空間であることを示せ.

(8) 写像 $D \colon F \to V$ を $D(a_{v,r}) := a_{v,0}$ で定める. D が線形写像であることを示し, $\operatorname{Ker} D$ と $\operatorname{Im} D$ を求めよ.

(9) $F = V \oplus R$ と直和分解することを示せ.

(10) F の次元を求めよ.

解答. (1)
- F の零元は任意の $x \in E$ を $0 \in \mathbb{R}$ に写す恒等函数 0. 実際, 任意の $f \in F$ と $x \in E$ に対して $(f+0)(x) = (0+f)(x) = f(x)$ となるので $f + 0 = 0 + f = f$.
- $f + g \in F$ を示す. 任意の $x, y \in E$ に対して

$$(f+g)(x) - (f+g)(y) = (f(x) + g(y)) - (f(y) + g(y)) = (f(x) - f(y)) + (g(x) - g(y))$$

$$\stackrel{*}{=} (f(x-y)-f(0))+(g(x-y)-g(0)) = (f(x-y)+g(x-y))-(f(0)+g(0))$$
$$= (f+g)(x-y)-(f+g)(0).$$

また任意の $c \in \mathbb{R}$ と $x \in E$ に対して

$$\begin{aligned}(f+g)(cx)-(f+g)(0) &= (f(cx)-f(0))+(g(cx)-g(0))\\ &\stackrel{*}{=} c(f(x)-f(0))+c(g(x)-g(0)) = c((f+g)(x)-(f+g)(0)).\end{aligned}$$

但し $*$ で $f, g \in F$ を用いた．よって $f+g \in F$.

- $cf \in F$ を示す．任意の $x, y \in E$ に対して

$$\begin{aligned}(cf)(x)-(cf)(y) &= c \cdot f(x) - c \cdot f(y) = c(f(x)-f(y))\\ &\stackrel{*}{=} c(f(x-y)-f(0)) = (cf)(x-y)-(cf)(0).\end{aligned}$$

また任意の $c' \in \mathbb{R}$ と $x \in E$ に対して

$$\begin{aligned}(cf)(c'x)-(cf)(0) &= c(f(c'x)-f(0)) \stackrel{*}{=} cc'(f(x)-f(0))\\ &= c'(c \cdot f(x) - c \cdot f(0)) = c'((cf)(x)-(cf)(0).\end{aligned}$$

但し $*$ で $f \in F$ を用いた．よって $cf \in F$.

(2) $f(cx+dy)-f(0) = f(cx-(-dy))-f(0) = f(cx)-f(dy) = (f(cx)-f(0))-(f(dy)-f(0)) = c(f(x)-f(0))+d(f(y)-f(0))$.

(3) 任意の $x, y \in E$ に対して

$$\begin{aligned}a_{v,r}(x)-a_{v,r}(y) &= (\langle v,x\rangle + r)-(\langle v,y\rangle + r) = \langle v,x\rangle - \langle v,y\rangle = \langle v,x-y\rangle\\ &= (\langle v,x-y\rangle + r) - r = a_{v,r}(x-y)-a_{v,r}(0).\end{aligned}$$

また任意の $c \in \mathbb{R}$ と $x \in E$ に対して

$$a_{v,r}(cx)-a_{v,r}(0) = (\langle v,cx\rangle + r) - r = c(((\langle v,x\rangle + r) - r) = c(a_{v,r}(x)-a_{v,r}(0)).$$

よって $a_{v,r} \in F$.

(4) 仮定より任意の $x \in E$ に対して $a_{v,r}(x) = a_{w,s}(x)$ だから $\langle v,x\rangle + r = \langle w,x\rangle + s$, つまり $\langle v-w,x\rangle = s-r$. 特に $x=0$ とすれば $r=s$ が従う．すると任意の $x \in E$ に対して $\langle v-w,x\rangle = 0$ だから, $x = e_1, \ldots, e_n$ の場合を考えて, $v-w=0$. 以上より $(v,r)=(w,s)$.

(5) $r \coloneqq f(0) \in \mathbb{R}$ および $v \coloneqq \sum_{i=1}^n v_i e_i \in E$, $v_i \coloneqq f(e_i)-f(0)$ とする．任意の $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$ に対して, (4) と同様にして (または n に関する帰納法で) $f(x)-f(0) = \sum_{i=1}^n x_i(f(e_i)-f(0)) = \sum_{i=1}^n x_i v_i = \langle v,x\rangle$. よって $f(x) = \langle v,x\rangle + f(0) = \langle v,x\rangle + r = a_{v,r}(x)$ が任意の $x \in E$ に対して成立するので $f = a_{v,r}$.

(6) $a_{v,r}, a_{w,s} \in F$ と $c, d \in \mathbb{R}$ を任意にとると, 任意の $x \in E$ に対して $(ca_{v,r}+da_{w,s})(x) = c(\langle v,x\rangle + r) + d(\langle w,x\rangle + s) = \langle cv+dw,x\rangle + (cr+ds) = a_{cv+dw,cr+ds}(x)$ なので $ca_{v,r}+da_{w,s} = a_{cv+dw,cr+ds}$.

(7) $0 = a_{0,0}$ は V と R に含まれる．また (6) から $ca_{v,0}+da_{w,0} = a_{cv+dw,0} \in V$, $ca_{0,r}+da_{0,s} = a_{0,cr+ds} \in R$ である．以上より V と R は部分空間.

(8) 任意の $a_{v,r}, a_{w,s} \in F$ と $c, d \in \mathbb{R}$ に対して $D(ca_{v,r}+da_{w,s}) = D(a_{cv+dw,cr+ds}) = a_{cv+dw,0} = ca_{v,0}+da_{w,0} = cD(a_{v,r})+dD(a_{w,s})$. よって D は線形写像.

$\operatorname{Ker} D = \{a_{v,r} \in F \mid D(a_{v,r}) = 0\} = \{a_{v,r} \in F \mid a_{v,0} = 0 = a_{0,0}\} \overset{*}{=} \{a_{v,r} \in F \mid v = 0\} = \{a_{0,r} \in F \mid r \in \mathbb{R}\} = R$. 但し $*$ で (4) を用いた.

$\operatorname{Im} D = \{D(a_{v,r}) \in F \mid a_{v,r} \in F\} = \{a_{v,0} \in F \mid v \in E\} = V$.

(9) 任意の $a_{v,r} \in F$ は (6) より $a_{v,r} = a_{v,0} + a_{0,r} \in V + R$ と書けるので, $F = V + R$ が成立する. また $V \cap R = \{a_{0,0}\} = \{0\} \subset F$. よって $F = V \oplus R$.

(10) 全単射 $F \to E \times \mathbb{R}$ と (6), (7), (9) より, $V \xrightarrow{\sim} E = \mathbb{R}^n$, $a_{v,0} \mapsto v$ および $R \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$, $a_{0,r} \mapsto r$ は線形空間として同型写像. よって線形空間として $F = V \oplus R \cong \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^{n+1}$ であり, $\dim F = n + 1$.

コメント. 各小問 5 点で, 計 50 点満点で採点しました. 平均点は 20.6 点でした.

F の元はアフィン線形函数と呼ばれるもので, $n = 1$ の場合は一次函数のことです. 実際 (5) より, 任意の $f \in F$ は $f(x) = a_{v,r}(x) = \langle x, v\rangle + r$ と書けるわけですが, $n = 1$ なら v は一次項の係数 (直線のグラフの傾き), r は定数項 (直線のグラフの y 切片) です. (10) の $\dim F$ は, 傾きの分の n 次元と定数項の分の 1 次元の和で, $n + 1$ になります.

(1) の "零元を明記する" は "F の零元を具体的に与える" という意味です. また "和が F 上の二項演算であること" は "和 $+$ が写像 $F \times F \to F$ を定めること", つまり "任意の $f, g \in F$ に対して $f + g \in F$ であること" です. 結合律や可換律を示している答案がありましたが, それらは "線形空間の諸公理" なので, この問題では示す必要はありません.

(2) で "$f \in F$ なら $f(0) = 0$" としている答案がいくつかありましたが, 上に述べたように一次函数の定数項は一般には 0 ではありませんし, (3) の $a_{v,r} \in F$ について, $r \neq 0$ なら $a_{v,r}(0) = r \neq 0$ です.

(5) が一番難しい小問です. 任意の $f \in F$ に対して v と r を具体的に与えれば良いのですが, 正解できたのは一人だけでした.

(6) で "$ca_{v,r} + da_{w,s} = c(\sum_{i=1}^n u_i x_i + r) + d(\sum_{i=1}^n w_i x_i + s) = \cdots$" と議論している答案がありましたが, 正確には $x \in E$ における値を考えて "$(ca_{v,r} + da_{w,s})(x) = \cdots$" とするべきです.

(7) で部分集合 V, R が零元を含む (または空でない) ことを確認していない答案がありました.

(9) の前半は "$D \in \operatorname{End}(F)$ と準同型定理 $F/\operatorname{Ker} D \cong \operatorname{Im} D$ から $F = \operatorname{Ker} D + \operatorname{Im} D$" としても良いです.

問題 2. n を正整数とする. 二変数 x, y の複素係数多項式全体がなす線形空間 $\mathbb{C}[x, y]$ について, 単項式 $x^n, x^{n-1}y, x^{n-2}y^2, \ldots, xy^{n-1}, y^n$ が生成する部分空間を $V(n) \subset \mathbb{C}[x, y]$ と書く. そして三つの写像 $E, F, H\colon \mathbb{C}[x, y] \to \mathbb{C}[x, y]$ を, 多項式 $f \in \mathbb{C}[x, y]$ に対して

$$E(f) \coloneqq y\frac{\partial f}{\partial x}, \quad F(f) \coloneqq x\frac{\partial f}{\partial y}, \quad H(f) \coloneqq -x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$$

で定義する. 但し $\frac{\partial}{\partial x}$ は x に関する微分を, $\frac{\partial}{\partial y}$ は y に関する微分を表す.

(1) 写像 E, F, H がどれも $V(n)$ の自己準同型であることを示せ.

(2) $V(n)$ の基底 $y^n, xy^{n-1}, \ldots, x^{n-1}y, x^n$ に関する $E, F, H \in \operatorname{End}\bigl(V(n)\bigr)$ の行列表示をそれぞれ求めよ.

(3) $V(1)$ の部分空間 W であって $E(W) \subset W$, $F(W) \subset W$ かつ $H(W) \subset W$ となるものを全て求めよ.

(4) 写像 E の合成を $E^2 \coloneqq E \circ E$, $E^3 \coloneqq E \circ E \circ E$ 等と略記し, また $E^1 \coloneqq E$, $E^0 = \mathrm{id}$ とする. 任意の $v \in V(n) \setminus \{0\}$ に対して $E^k(v) \in \mathbb{C}y^n \setminus \{0\}$ となる非負整数 k が存在することを示せ.

(5) 一般の n について, $V(n)$ の部分空間 W であって $E(W) \subset W$, $F(W) \subset W$ かつ $H(W) \subset W$ となるものを全て求めよ.

解答. (1) 微分作用素 $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ 及び掛算写像 $x \cdot -, y \cdot -$ は $\mathbb{C}[x,y]$ の自己準同型だから, それらの合成 $E = (y \cdot -) \circ \frac{\partial}{\partial x}$, $F = (x \cdot -) \circ \frac{\partial}{\partial y}$, $H_1 \coloneqq (x \cdot -) \circ \frac{\partial}{\partial x}$, $H_2 \coloneqq (y \cdot -) \circ \frac{\partial}{\partial y}$ も $\mathbb{C}[x,y]$ の自己準同型であり, それらの線形結合 $H = -H_1 + H_2$ も $\mathbb{C}[x,y]$ の自己準同型である. あとは E, F, H それぞれによる $V(n)$ の像が $V(n)$ に含まれることを示せば $E, F, H \in \mathrm{End}\big(V(n)\big)$ が従うが, それを示すには $V(n)$ の基底 $x^i y^{n-i}$ $(i = 0, \ldots, n)$ の像が $V(n)$ に属すことを言えば十分.

$$E(x^i y^{n-i}) = i x^{i-1} y^{n-i+1}, \quad F(x^i y^{n-i}) = (n-i) x^{i+1} y^{n-i-1}, \quad H(x^i y^{n-i}) = (n-2i) x^i y^{n-i}$$

はどれも $V(n)$ の元だから, 主張が示せた.

(2) (1) の計算から, 行列表示は以下の $(n+1)$ 次正方行列になる. 但し書いていない成分は全て 0.

$$\big(E(y^n)\ E(xy^{n-1})\ \cdots\ E(x^{n-1}y)\ E(x^n)\big) = \big(y^n\ xy^{n-1}\ \cdots\ x^{n-1}y\ x^n\big) \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & n \\ & & & & 0 \end{pmatrix},$$

$$\big(F(y^n)\ F(xy^{n-1})\ \cdots\ F(x^{n-1}y)\ F(x^n)\big) = \big(y^n\ xy^{n-1}\ \cdots\ x^{n-1}y\ x^n\big) \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ n & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 2 & 0 & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\big(H(y^n)\ H(xy^{n-1})\ \cdots\ H(x^{n-1}y)\ H(x^n)\big) = \big(y^n\ xy^{n-1}\ \cdots\ x^{n-1}y\ x^n\big) \begin{pmatrix} n & & & & \\ & n-2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 2-n & \\ & & & & -n \end{pmatrix}.$$

(3) [(5) で一般の n の場合を議論するが, それとは別の方法] $v = ay + bx \in W$ とすると, $E(v) = by$ と $F(v) = ax$ が W に属する. これらが張る W の部分空間 $U \coloneqq \langle v, E(v), F(v) \rangle \subset W$ を考える. V の基底 y, x に関して, これらを $(v, E(v), F(v)) = (y, x) \left(\begin{smallmatrix} a & b & 0 \\ b & 0 & a \end{smallmatrix}\right)$ と表示したときの係数行列の小行列式 (3 つある) は $(ab, a^2, -b^2)$. 特に $v \neq 0$ なら小行列式が同時に 0 になることはない. つまり係数行列の階数は 2 で, U は $V(1)$ 全体になる. つまり W も $V(1)$ 全体. 従って, 求める W は $V(1)$ と $\{0\}$.

(4) 任意の $v \in V(n) \setminus \{0\}$ は $v = \sum_{i=k}^n v_i x^i y^{n-i}$, $v_i \in \mathbb{C}$, $v_k \neq 0$ と一意に書ける (k は x に関する最低次数). このとき $E^k(y) = k! v_k y^n \in \mathbb{C}y^n \setminus \{0\}$.

(5) $W \neq \{0\}$ と仮定して $v \in W \setminus \{0\}$ を取る. (4) より非負整数 k が存在して $E^k(y) \in \mathbb{C}y^n \setminus \{0\}$. $W \subset V(n)$ は部分空間だから $y_n \in W$. すると $xy^{n-1} = \frac{1}{n} F(y^n) \in W$, $x^2 y^{n-2} = \frac{1}{n-1} F(xy^{n-1}) \in W$ 等となって, 帰納的に $x^i y^{n-i} \in W$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ が成立する. つまり $W = V(n)$.
従って求める W は $V(n)$ と $\{0\}$.

コメント. (1) と (2) は各 15 点, (3) と (4) は各 5 点, (5) は 10 点として, 計 50 点満点で計算しました. 平均点は 16.8 点でした.

(1) と (2) は 5/16 の小テストと実質的に同じ問題です. なので 30 点前後は確保できるようにしたのですが... (3)–(5) は, 小テストのコメントに書いた "$V(n)$ は Lie 環 $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ の既約表現" を題材にしています.

(1) では, 小テストの時にもコメントしましたが, V から V への写像であることと線形写像であることの二つを示す必要があります.

(2) で結果だけ書いている答案が目立ちましたが, 行列表示の定義を含め, 途中の議論を書いて下さい.

(3) で $W = ax$ $(a \in \mathbb{C})$ のような答案がありました. ax は $V(1)$ の元ですが, $V(1)$ の部分空間ではありません. 多分 $W = \{ax \mid a \in \mathbb{C}\}$ の意味なのでしょうが, この場合は結局 $W = \mathbb{C}x$ ですね. そして $E(x) = y \notin W$ より, この W は条件を満たしません.

全体のコメント

計 $50+50=100$ 点で採点しました．平均点は $20.6+16.8=37.4$ 点でした．答案 1 枚目の名前欄の横に xx 点と書いてあるのが点数です．得点分布は次の通りです．

得点	–20	21–30	31–39	40–49	50–59	60–75
人数	6	14	8	10	8	3

全体的に, 集合や部分集合, 写像といった (現代数学基礎 AI で扱われているはずの) 基本的な概念がちゃんと身についていない人が目立ちました．例えば

- 問題 1 で F が E 上の函数の集合であることをちゃんと把握していない．そのため “$f(x)-g(x)\in F$” といった不正確な記述をしてしまう．正しくは “$f(x)-g(x)\in\mathbb{R}$”.
- 問題 2 (3) で線形空間の部分空間 W で条件を満たすものを求めているはずなのに, 答えが “$W=ax$ $(a\in\mathbb{C})$” と集合にすらなっていない．

以上です．